NOM :
Prénom :

Mardi 08 Avril 2025

Interrogation 23

Dénombrement

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

Soit E un ensemble fini. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.

2. Cardinal de l'ensemble des applications.

Soit E, F deux ensembles finis. Alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et $\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$.

3. Cardinal d'une réunion.

Soit E, F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini et $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

4. Cardinal d'un produit cartésien.

Soit E, F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.

5. Caractérisation de l'injectivité et surjectivité entre ensembles finis.

Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$. Alors $\mathrm{Card}(f(E)) \leq \mathrm{Card}(E)$. Et $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E) \iff f$ injective. Et $\mathrm{Card}(f(E)) \subset \mathrm{Card}(F)$. Et $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F) \iff f$ surjective.

6. Nombre de bijections entre ensembles finis.

Soit E, F deux ensembles finis de même cardinal. Soit $f : E \to F$. Alors f est bijective, si et seulement si, f est injective, si et seulement si, f est surjective.

7. Nombre d'injections.

Soit E, F deux ensembles finis. Soit $n = \mathrm{Card}(E)$, $p = \mathrm{Card}(F)$. Si $n > p$, alors il n'y a pas d'injections de E dans F. Si $n \leq p$, alors il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F.

8. Définition d'un arrangement et d'une combinaison.

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Si $p \leq n$, un arrangement de p éléments de E, est une p-listes d'éléments de E sans répétition. C'est un tirage d'éléments de E, sans remise et en tenant compte de l'ordre.

Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensembles de E de cardinal p. C'est le tirage de p éléments de E, sans remise et sans tenir compte de l'ordre.

Exercice 2 :
Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant deux cartes noires et 3 cartes rouges ?

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 16 cartes noires et 16 cartes rouges. On a donc $\binom{16}{2}$ façons de sélectionner 2 cartes noires parmi les 16 du paquets. Pour chaque couple de cartes noires, on complète la main par l'une des $\binom{16}{3}$ combinaisons de 3 cartes rouges du paquet. Il y a donc $\binom{16}{2} \times \binom{16}{3}$ mains de 5 cartes contenant deux cartes noires et trois cartes rouges.