



DM 8

Dénombrément

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 25 Mars 2025

Problème 1 (Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$) :

Partie I : Théorème de Cantor-Bernstein

Soit E et F deux ensembles. soit $i : E \rightarrow F$ et $j : F \rightarrow E$ injectives. On pose

$$A_0 = E \setminus j(F), \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} = j \circ i(A_n).$$

et

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \text{et} \quad C = E \setminus B.$$

1. Construisons une bijection entre E et F .

(a) On a $A_0 \subset B$ par définition de B . Donc $E \setminus B \subset E \setminus A_0$. Or $A_0 = E \setminus j(F)$. Donc $E \setminus A_0 = j(F)$ par involution du passage au complémentaire. Donc $C = E \setminus B \subset j(F)$.

Donc si $x \in C$, alors, par définition de l'inclusion, $x \in j(F)$ et donc $\exists z \in F$ tel que $x = j(z)$.

Soit $x \in C$. Montrons l'unicité de l'antécédent par j de x . On sait qu'il existe $z \in F$ tel que $x = j(z)$ d'après ce qui précède. Supposons qu'il existe $z' \in F$ tel que $x = j(z')$. Alors $j(z) = j(z')$. Or j est injective. Donc $z = z'$. Et donc x a un unique antécédent par j dans F .

Autrement dit, $\forall x \in C, \exists! z \in F$ tel que $x = j(z)$. On note $\forall x \in C, \varphi(x) \in F$ tel que $j(\varphi(x)) = x$.

(b) Si $x \in B$, on pose $\varphi(x) = i(x)$.

On a donc défini :

$$\varphi : E \rightarrow F$$
$$x \mapsto \begin{cases} i(x) & \text{si } x \in B \\ \varphi(x) \in F \text{ t.q. } j(\varphi(x)) = x & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

Soit $x \in E$. Si $x \notin B$, alors $\varphi(x)$ est unique d'après la question précédente (x a un unique antécédent dans F par j est on choisit cet unique élément). Si $x \in B$, alors $i(x)$ est unique également car i est une application bien définie.

Donc $\forall x \in E, \exists! y \in F$ tel que $y = \varphi(x)$ (avec $y = i(x)$ ou $y = z$ tel que $j(z) = x$ si $x \in B$ ou non).
Donc φ est bien une application.

2. Montrons que φ est injective.

(a) Par définition de φ , on a $\varphi|_B = i$. En effet, $\forall x \in B, \varphi(x) = i(x)$ et l'égalité entre application nous fournit bien $\varphi|_B = i$. Or i est injective par hypothèse. Donc $\varphi|_B$ est injective.

Soit $x, y \in C$ tels que $\varphi|_C(x) = \varphi|_C(y)$. Par définition de la restriction, on a $\varphi(x) = \varphi(y)$. Or $\varphi : E \rightarrow F$ et $j : F \rightarrow E$. Donc, en appliquant, j , on a $j(\varphi(x)) = j(\varphi(y))$. Puis, par définition de φ pour des éléments dans C , $x = y$. Donc $\varphi|_C$ est injective, par caractérisation de l'injectivité.

- (b) Soit $x \in C$ et $y \in B$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. En application j , on a donc $j(\varphi(x)) = j(\varphi(y))$. Mais $x \in C$. Donc, par définition de φ , $j(\varphi(x)) = x$. Donc $x = j(\varphi(y))$ par transitivité de l'égalité. D'autre part, comme $y \in B$, par définition de φ , on a $\varphi(y) = i(y)$. Et donc $x = j(i(y)) = j \circ i(y)$ par définition de la composition.
- (c) Soit $x, y \in E$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Si $x, y \in B$, alors $x = y$ car $\varphi|_B$ est injective. Si $x, y \notin B$, alors $x, y \in C$ par définition de C et donc $x = y$ car $\varphi|_C$ est injective.

Sinon, on a $x \in B$ et $y \in C$ ou $x \in C$ et $y \in B$. Sans perte de généralités, quitte à renommer x et y , on peut supposer $x \in C$ et $y \in B$. Alors, d'après la question précédente, $x = (j \circ i)(y)$. Par définition de B et par définition de la réunion, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in A_n$. Alors $x = (j \circ i)(y) \in (j \circ i)(A_n) = A_{n+1}$. Et donc, par définition de l'inclusion, $x \in B$. Or $x \in C = E \setminus B$. Donc ❗ .

Par conséquent, on a que $x, y \in B$ ou $x, y \in C$. Et donc en appliquant les deux premiers paragraphes, $x = y$. Et donc φ est injective, par caractérisation de l'injectivité.

3. Soit $y \in F$. On pose $x = j(y) \in E$. Par définition, $x \in j(F)$. Donc $x \notin A_0$. Or $A_0 \subset B$. Donc $x \notin B$. Donc $x \in C$ par définition de C . Or $j(y) = x$. Donc par définition de φ , $\varphi(x) = y$. Et donc φ est surjective.

4. Application :

On considère les deux applications :

$$j : \begin{array}{ccc} [0, 1[& \rightarrow & [0, 1] \\ x & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad i : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & [0, 1[\\ x & \mapsto & x/2 \end{array}$$

et aussi $E = [0, 1]$ et $F = [0, 1[$.

- (a) Il est assez clair que j est injective : si $x, y \in [0, 1[$ tel que $j(x) = j(y)$, alors, par définition de j , $x = y$ et donc j est injective (c'est l'injection triviale de l'inclusion).

Si $x, y \in [0, 1]$ tels que $i(x) = i(y)$, alors $x/2 = y/2$ par définition de g et donc $x = y$. Donc i est injective.

- (b) On a $j([0, 1]) = [0, 1[$ facilement. Alors $A_0 = [0, 1] \setminus [0, 1[= \{1\}$. Puis, $A_1 = j \circ i(\{1\}) = \{1/2\}$.

Si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $A_n = \{\frac{1}{2^n}\}$, alors $j \circ i(\{1/2^n\}) = \{\frac{1}{2^{n+1}}\}$. donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{\frac{1}{2^n}\}$.

Alors

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{2^n} \right\} = \{1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots\}.$$

Et donc $C = [0, 1] \setminus B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left] \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right[$.

- (c) D'après ce qui précède, on a donc

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & [0, 1[\\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } \exists n \in \mathbb{N}, x = \frac{1}{2^n} \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

- (d) Alors $\varphi(0) = 0$ car $0 \in C$. Et $\varphi(1/4) = 1/8$ car $1/4 \in B$. Et $\varphi(1/3) = 1/3$ car $1/3 \in C$. Et $\varphi(1/2) = 1/4$ car $1/2 \in B$. Et $\varphi(2/3) = 2/3$ car $2/3 \in C$. Et $\varphi(3/4) = 3/4$ car $3/4 \in C$.

Partie II : Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

1. On considère l'application $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n - 1$. Il est très facile de voir que f est bijective puisque $f^{-1}(n) = n + 1$. On en déduit donc que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

On considère ensuite $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}$ définie par $g(n) = 2n$. On a $g^{-1}(n) = n/2$ et donc g est bijective. Donc $\mathcal{P}$ est également dénombrable.

2. (a) Le calcul montre

n	0	1	2	3	4	5
$\varphi(n)$	0	-1	1	-2	2	-3

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est soit paire, soit impaire. Donc $\varphi(n)$ est bien définie. Et si n est paire, alors $n/2 \in \mathbb{N}$ et si n est impaire, alors $n+1$ est paire et donc $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$. Donc $\varphi(n) \in \mathbb{Z}$ dans les deux cas. Donc $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.
- (c) On considère l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{N} \\ \tilde{\varphi} : n &\mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi(2n) = \tilde{\varphi}(n) = 2n \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi} \circ \varphi(2n+1) = \tilde{\varphi}(-n-1) = 2n+1$$

donc $\tilde{\varphi} \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{N}}$. De même, on trouve facilement $\varphi \circ \tilde{\varphi} = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$.

La caractérisation de la bijectivité nous permet d'en déduire que φ est bijective et on a même son inverse.

3. (a) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Alors $2^p(2q+1)$ existe est est uniquement déterminé (2^p est unique pour une valeur de p donnée et $2q+1$ est unique également). Donc ψ est bien définie.
- (b) Soit $(p, q), (r, s) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\psi(p, q) = \psi(r, s)$. On a donc $2^p(2q+1) = 2^r(2s+1)$. On en déduit donc $2^{p-r}(2q+1) = 2s+1$. Donc $2^{p-r}(2q+1)$ est impair. Il n'est donc pas divisible par 2 et donc, $2^{p-r} = 0$. Autrement dit, $p = r$. On obtient alors $2q+1 = 2s+1$ d'où l'on déduit immédiatement $q = s$. Et donc $(p, q) = (r, s)$. Donc ψ est injective.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la valuation 2-adique, $v_2(n) = \max\{k \in \mathbb{N}, 2^k | n\}$. Donc $2^{v_2(n)} | n$ et $2^{v_2(n)+1} \nmid n$. Et donc, par définition de la divisibilité, $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^{v_2(n)}m$. De plus, par définition de $v_2(n)$ (def max), $2 \nmid m$. Donc $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2q+1$.

On pose $p = v_2(n) \in \mathbb{N}$. Et donc $\exists p, q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^p(2q+1)\psi(p, q)$. Donc ψ est surjective.

- (d) On a montré dans les deux questions précédentes que $\psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ est injective et surjective. Elle est donc bijective. donc $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ sont en bijections et donc $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

On a déjà montré que $\mathbb{Z}$ est dénombrable grâce à la fonction φ précédente. On considère l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{N}^2 \\ \Phi : (n, m) &\mapsto (\varphi(n), \varphi(m)) \end{aligned}$$

Cette application est parfaitement définie parce que φ l'est. Et par ailleurs, si on considère l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^2 &\rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ \tilde{\Phi} : (n, m) &\mapsto (\varphi^{-1}(n), \varphi^{-1}(m)) \end{aligned}$$

(également bien définie puisque φ est une bijection, on a, pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\tilde{\Phi} \circ \Phi(n, m) = \tilde{\Phi}(\varphi(n), \varphi(m)) = (\varphi^{-1}(\varphi(n)), \varphi^{-1}(\varphi(m))) = (n, m)$$

et pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\Phi \circ \tilde{\Phi}(p, q) = \Phi(\varphi^{-1}(p), \varphi^{-1}(q)) = (\varphi \circ \varphi^{-1}(p), \varphi \circ \varphi^{-1}(q)) = (p, q).$$

Donc $\tilde{\Phi} \circ \Phi = \text{Id}_{\mathbb{Z}^2}$ et $\Phi \circ \tilde{\Phi} = \text{Id}_{\mathbb{N}^2}$. La caractérisation de la bijectivité nous permet alors d'affirmer que Φ est bijective.

Ainsi, $\mathbb{Z}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. Donc, par composition de deux bijections, $\mathbb{Z}^2$ est également en bijection avec $\mathbb{N}$ (prendre $\psi \circ \Phi$).

4. (a) Comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, on peut considérer l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ f : n &\mapsto n \end{aligned}$$

Cette application est bien sûr injective mais en aucun cas surjective.

- (b) Soit $r, r' \in \mathbb{Q}$ tel que $\zeta(r) = \zeta(r')$. Alors $\exists!(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\exists!(p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $r = p/q$ et $r' = p'/q'$. Dans ce cas,

$$\zeta(r) = (p, q) \quad \text{et} \quad \zeta(r') = (p', q').$$

On a donc $(p, q) = (p', q')$. Donc $p = p'$ et $q = q'$ et par suite $r = p/q = p'/q' = r'$. Donc ζ est injective.

Mais ζ n'est pas surjective. En effet, le couple $(4, 2)$ n'a pas d'antécédent. Montre le par l'absurde. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\zeta(r) = (4, 2)$. Or, par définition de ζ , on doit avoir $r = 4/2 = 2$. Mais $\zeta(2) = (2, 1)$. Et l'injectivité de ζ nous fournit ⚡ . Donc ζ n'est pas surjective.

- (c) On considère les applications

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{N}^* & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathbb{N} \\ r & \mapsto & (p, q) & & (u, v) & \mapsto & (\varphi(u), v-1) & & \\ & & & & (s, t) & \mapsto & 2^s(2t+1) & & \\ & & & & & & n & \mapsto & n-1 \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathbb{N} \\ r & \mapsto & (p, q) & & \\ & & (p, q) & \mapsto & 2^{\varphi(p)}(2q-1)-1 \end{array}$$

Observons que Ψ est parfaitement définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ puisque φ l'est. Et par ailleurs, si on note

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ (x, y) \mapsto (\varphi^{-1}(x), y+1)$$

cette application est parfaitement définie puisque $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ est bijective (donc $\varphi^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$) et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \Psi \circ \tilde{\Psi}(x, y) = \Psi(\varphi^{-1}(x), y+1) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), y+1-1) = (x, y).$$

Donc $\Psi \circ \tilde{\Psi} = \text{Id}_{\mathbb{N}^2}$. Et de même,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \tilde{\Psi} \circ \Psi(x, y) = \tilde{\Psi}(\varphi(x), y-1) = (\varphi^{-1}(\varphi(x)), y-1+1) = (x, y).$$

Et donc $\tilde{\Psi} \circ \Psi = \text{Id}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*}$. Donc, par caractérisation de la bijectivité, Ψ est bijective et $\Psi^{-1} = \tilde{\Psi}$.

Ainsi, l'application $f^{-1} \circ \psi \circ \Psi \circ \zeta$ est la composée d'une injections (ζ) avec des bijections. Elle est donc injective.

- (d) Avec la question 4a, on a une injection $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Dans cette question, on vient d'exhiber une injection $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$. Le théorème de Cantor-Bernstein nous permet alors de conclure qu'il existe une bijection $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$. Ainsi, $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Problème 2 (Permutations sans points fixes) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note γ_n le nombre de permutations dans $\mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun points fixes.

- γ_1 correspond aux éléments de $\mathfrak{S}_1$ sans points fixes. Or $\text{Card}(\mathfrak{S}_1) = 1! = 1$. Et $\mathfrak{S}_1 = \{\text{Id}_{\{1\}}\}$. Donc 1 est un point fixe du seul élément de $\mathfrak{S}_1$. Donc $\gamma_1 = 0$.

On a $\text{Card}(\mathfrak{S}_2) = 2! = 2$. L'identité n'a que des points fixes et ne doit pas être considéré. Il reste alors $\tau \in \mathfrak{S}_2$, la transposition ($\tau = (1\ 2)$) qui n'a aucun points fixes. Donc $\gamma_2 = 1$.

2. On a $\mathfrak{S}_3 = \{\text{Id}_{\{1,2,3\}}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ (où $(a\ b\ c)$ est à comprendre comme une permutation circulaire, c'est à dire envoyant a sur b , b sur c et c sur a). $\text{Id}_{\{1,2,3\}}$ a 3 points fixes ; les 3 transpositions ont un seul point fixe ; les deux permutations circulaires n'ont aucun points fixes.

Alors $\gamma_3 = 2$.

3. On suppose $n = 4$.

- (a) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ ayant trois points fixes. Or σ est une permutation de 4 éléments. Si 3 sont fixés, le quatrième l'est aussi nécessairement (i.e. si $\exists k_1, k_2, k_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$, $k_1 < k_2 < k_3$ tels que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\sigma(k_i) = k_i$, alors $\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\sigma(k) = k$ car σ est une bijection).

Donc il n'y a pas d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ ayant trois points fixes.

- (b) Pour fabriquer un élément σ de $\mathfrak{S}_4$ ayant deux points fixes, il faut choisir les deux éléments fixés par σ , puis σ étant une bijection, établir une bijection sans points fixes sur les deux éléments qui ne sont pas fixés (sinon σ aurait eu plus que deux points fixes). Or $\gamma_2 = 1$. Donc pour chaque couple de points fixés, il y a $\gamma_2 = 1$ éléments de $\mathfrak{S}_4$ ayant ces deux éléments fixes. Or il y a $\binom{4}{2} = 6$ couples possibles de points fixes.

Finalement, il y a 6 éléments de $\mathfrak{S}_4$ n'ayant que deux points fixes.

- (c) Pour fabriquer un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ ayant un point fixe, il faut déjà choisir l'élément fixé par σ , puis établir une bijection sans points fixes sur les trois éléments qui restent. On a $\binom{4}{1} = 4$ choix pour le point fixe. Pour chaque choix de point fixe, on a $\gamma_3 = 2$ façon de faire une bijection sans point fixes sur les deux éléments qui restent.

On a donc $4 \times 2 = 8$ éléments de $\mathfrak{S}_4$ avec un seul point fixe.

- (d) Pour dénombrer les éléments de $\mathfrak{S}_4$ sans points fixes, on va compter les éléments de $\mathfrak{S}_4$ avec au moins un point fixe. Or, d'après les 3 questions précédentes, on a 8 éléments de $\mathfrak{S}_4$ avec un point fixe ; il y a en a 6 avec 2 points fixes ; 0 avec 3 points fixes ; et 1 seul (l'identité) avec 4 points fixes. Or tous les éléments de $\mathfrak{S}_4$ qui n'ont pas un, deux, trois ou quatre points fixes, n'ont pas de points fixes, donc :

$$\gamma_4 = \text{Card}(\mathfrak{S}_4) - 8 - 6 - 0 - 1 = 24 - 15 = 9.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) On a $\text{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!$.

- (b) Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Pour faire un élément de $\mathfrak{S}_n$ avec k points fixes, il faut choisir les points fixes, puis faire une bijections sur les $n - k$ éléments qui restent sans points fixes.

Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les points fixes, et pour chaque choix de points fixes, il y a γ_{n-k} façons de faire une bijections sans points fixes sur les $n - k$ éléments restant.

On a donc $\binom{n}{k} \gamma_{n-k}$ éléments de $\mathfrak{S}_n$ avec k -points fixes.

- (c) Si on note, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, S_k l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_n$ ayant k point fixes, alors

$$\mathfrak{S}_n = \bigcup_{k=0}^n S_k$$

(car un élément de $\mathfrak{S}_n$ ne peut avoir plusieurs nombres de points fixes différents). Donc $\text{Card}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(S_k)$.

Or d'après la question précédente, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\text{Card}(S_k) = \binom{n}{k} \gamma_{n-k}$. Donc

$$\begin{aligned} n! &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \gamma_{n-k} && \text{symétrie coeff bin} \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \gamma_{\ell}. && \text{chgt indice } \ell = n - k \end{aligned}$$

(d) D'après la question précédente, on a

$$120 = 5! = \gamma_0 + 5\gamma_1 + 10\gamma_2 + 10\gamma_3 + 5\gamma_4 + \gamma_5.$$

D'où, d'après les questions précédentes, $\gamma_5 = 120 - 76 = 44$.

(e) On peut modéliser la situation de la façon suivante. On peut considérer les 5 invités en file indienne à l'entrée de la fête. Ils ont chacun un manteau. A la sortie, ils récupèrent tous un manteau au hasard. En sortant, on peut les remettre dans le même ordre qu'à leur entrée et regarder alors le nouvel ordre des manteaux. Autrement dit, en fixant l'ordre des personnes à l'entrée et à la sortie (et identique), on peut considérer la façon donc les manteaux sont permutés.

La situation correspond donc à compter le nombre de façon qu'il y a de permuter les manteaux (dans un quintuplet fixes de personnes). Et pour qu'aucun des invités n'aient conservé son manteau, il faut donc une permutation n'ayant pas de point fixe. On cherche donc le nombre de permutations des 5 manteaux sans points fixes.

D'après la question précédente, on a vu qu'il y a 44 telles permutations. Il y a donc 44 façons pour les invités de repartir de la fête sans qu'aucun invité n'ait son manteau. Or il y a $5! = 120$ façons de permuter les manteaux (donc pour les invités pour repartir avec des manteaux).

Finalement, la probabilité pour que les invités repartent tous sans leur manteau personnel (et en supposant que tous les manteaux peuvent être choisis de façon équiprobable) est $\frac{44}{120} = \frac{11}{30}$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1 - 1)^n = 0^n = \delta_{0,n}$$

par Newton.

(b) Commençons par une preuve par calcul. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j, k \in \{0, \dots, n\}$ avec $j \leq k$. Alors

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{j} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{j!(k-j)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!j!(k-j)!} \\ &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-j-(k-j))!} \\ &= \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} \end{aligned}$$

Passons à un raisonnement par dénombrement. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j, k \in \{0, \dots, n\}$ avec $j \leq k$. Soit E un ensemble fini de cardinal n . Essayons d'établir le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $A \subset B$ avec $\text{Card}(A) = j$ et $\text{Card}(B) = k$. On essaie donc de trouver le nombre de sous-ensemble de E , l'un de cardinal j , l'autre de cardinal k , inclus l'un dans l'autre.

On a $\binom{n}{k}$ façon de fabriquer un ensemble $B \subset E$ avec $\text{Card}(B) = k$. Pour chaque choix de B , on aura alors $\binom{k}{j}$ sous-ensemble A de B avec $\text{Card}(A) = j$. On a donc $\binom{n}{k} \binom{k}{j}$ façons de fabriquer des couples (A, B) de sous-ensemble de E avec $A \subset B$ et $\text{Card}(A) = j$ et $\text{Card}(B) = k$.

On peut aussi commencer par fabriquer A . On a alors $\binom{n}{j}$ façon de fabriquer un sous-ensemble A de E de cardinal j . Une fois un tel sous-ensemble A choisi (et pour chacun de ces choix là), on doit fabriquer un ensemble $B \subset E$ tel que $A \subset B$ et $\text{Card}(B) = k$. On a déjà les j éléments de A qui sont choisis. Il faut donc choisir encore $k - j$ éléments pour faire un ensemble de cardinal k . Et ces $k - j$ éléments doivent être choisis à l'extérieur de A (sinon on aurait pas k éléments distincts et B ne serait pas de cardinal k). Donc on doit choisir $k - j$ éléments dans $\overline{A}$. Or $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A) = n - j$. On doit fabriquer $B \setminus A$ dans $\overline{A}$ avec $\text{Card}(B \setminus A) = k - j$ et il y a $\binom{n-j}{k-j}$ façons de choisir $k - j$ éléments dans $\overline{A}$. On a donc $\binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}$ façons de fabriquer un couple (A, B) avec $\text{Card}(A) = j$, $\text{Card}(B) = k$ et $A \subset B$.

D'où $\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}$.

(c) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a_j \\
&= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k-j}{j} a_j && \text{cf 5b} \\
&= \sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} a_j \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n-j}{k-j} \right) \\
&= \sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} a_j \sum_{\ell=0}^{n-j} (-1)^{n-\ell-j} \binom{n-j}{\ell} \right) && \text{chgt indice } \ell = k - j \\
&= \sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} (-1)^{n-j} a_j \sum_{\ell=0}^{n-j} (-1)^{\ell} \binom{n-j}{\ell} \right) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \delta_{0,n-j} a_j && \text{cf 5a} \\
&= a_n
\end{aligned}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k$. Donc, d'après la question précédente (avec $a_n = \gamma_n$ et $b_n = n!$), on a

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \\
&= \sum_{\ell=0}^n (-1)^{\ell} \frac{n!}{\ell!} && \text{chgt indice } \ell = n - k \\
&= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $g_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k$ et $f_n : x \mapsto e^x g_n(x)$.

(a) g_n est une fonction polynomiale, donc $g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Et, par linéarité de la dérivation,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, g'_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(k-1)!} x^{k-1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell!} x^\ell \\
&= -g_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Puis, par produit de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Et alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = e^x (g_n(x) + g'_n(x))$$

$$\begin{aligned}
&= e^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right) \\
&= \frac{e^x x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

(b) On déduit facilement, par la question précédente et croissance de la fonction $\exp$, que

$$\forall x \in [0, 1], |f'_n(x)| \leq \frac{e}{n!}.$$

Or $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]0, 1[, \mathbb{R})$, d'où, par inégalité des accroissements finis,

$$\forall a, b \in [0, 1], |f_n(a) - f_n(b)| \leq \frac{e}{n!} |a - b|$$

et donc, en particulier

$$|f_n(1) - f_n(0)| \leq \frac{e}{n!}.$$

(c) Par la question précédente et la def de f , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |g_n(1) - g_n(0)| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right| \leq \frac{e^2}{n!}.$$

D'où par théorème des gendarmes,

$$g_n(1) = \frac{\gamma_n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

La quantité $\frac{\gamma_n}{n!}$ correspond alors à la densité (donc la comparaison des quantités) des bijections sans points fixes dans l'ensemble des bijections. Et la limite indique donc que, à la limite, plus aucune bijection n'aura de points fixes. En fait, plus exactement, plus le cardinal de l'ensemble des éléments qu'on permutent est grand et moins une bijection aura de chance d'avoir de points fixes.