NOM :
Prénom :

Mardi 29 Avril 2025

Lycée Loges

Interrogation 24

Groupes Symétriques

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Propriétés des transpositions.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a $\binom{n}{2}$ transpositions dans $\mathfrak{S}_n$. $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$, $(i\ j) = (j\ i)$. Et toute transposition est d'ordre 2.

2. Propriétés des cycles.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a $(n-1)!$ permutations circulaires dans $\mathfrak{S}_n$. Si $p \in \{2,\ldots,n\}$, il y a $(p-1)!\binom{n}{p}$ p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$. Les cycles sont les permutations possédant exactement une seule orbite non triviale.

3. Décomposition d'un cycle en transpositions.

Soit $n \geq 2$, $p \in \{2,\ldots,n\}$ et $i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,n\}$ deux à deux distincts. Alors

$$(i_1\ i_2\ \ \ldots i_p) = \prod_{k=0}^{p-2}(i_1\ i_(p-k)) = \prod_{k=1}^{p-1}(i_k\ i_{k+1})$$

4. Définition du groupe alterné.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le groupe alterné d'ordre n, noté $\mathfrak{A}_n$, est le noyau de la signature. *i.e.* $\mathfrak{A}_n = \ker(\varepsilon) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \varepsilon(\sigma) = 1\}$.

5. Définition du support d'une permutation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit le support de σ, noté $\mathrm{Supp}(\sigma)$ par $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{x \in \{1,\ldots,n\},\ \sigma(x) \neq x\}$. Donc $\mathrm{Supp}(\sigma)$ est l'ensemble des points non fixes par σ.

6. Lien entre support et orbites.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \bigcup_{\substack{x=1\\ \sigma(x)\neq x}}^{n} \mathcal{O}_\sigma(x).$$

7. Ordre de permutations à supports disjoints.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_n$ tels que $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathrm{Supp}(\tau) = \emptyset$. Alors $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ et

$$\omega(\sigma \circ \tau) = \omega(\sigma) \vee \omega(\tau).$$

8. Expression de la signature.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_i \mathfrak{S}_n$. Alors

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}.$$

Exercice 2 :
On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 7 & 8 & 1 & 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Donner le support de σ, les points fixes, la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoints et en déduire la signature de σ.

On détermine d'abord les orbites de σ :

$$\mathcal{O}_\sigma(1) = \{1,2,3,5,7\},\ \mathcal{O}_\sigma(4) = \{4\},\ \mathcal{O}_\sigma(6) = \{6,8,10,9\}.$$

Donc 4 est le seul point fixe de σ et $\mathrm{Supp}(\sigma) = \mathcal{O}_\sigma(1) \cup \mathcal{O}_\sigma(6) = \{1,2,3,5,6,7,8,9,10\}$. Et

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 5\ 7) \circ (6\ 8\ 10\ 9).$$

Alors

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{5-1}(-1)^{4-1} = -1.$$

Donc σ est une permutation impaire.