Chapitre 25

Intégration sur un segment

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

29 avril 2025

$$\int devil = evil + C$$

Ce chapitre précède normalement le chapitre sur les équations différentielles. Puisqu'on utilise des primitives et des intégrales dans le chapitre sur les équations différentielles.

Historiquement, la notion d'intégrale provient de la géométrie. Elle correspond à la nécessité du calcul d'aire (sous une courbe donnée et délimitée par l'axe des abscisses et des droites verticales). Les prémices de l'intégration démarrent dans la Grèce antique (dans sa version calcul d'aire), mais c'est avec Leibniz au XVIIème siècle qu'apparaît vraiment la théorie de l'intégration en tant que telle. La version moderne présentée ici est une reformulation avec le formalisme moderne de la théorie de l'intégration. Ce formalisme permet, non seulement de définir les choses avec rigueur, mais également de faire le lien avec la dérivabilité. Ce qui donne naissance aux primitives (et au lien avec les intégrales).

En fait, il existe d'autres types d'intégration. La plus utilisée aujourd'hui est l'intégrale de Lebesgue. Elle a été introduite pour combler les lacunes de l'intégrale de Riemann. L'intégrale de

Lebesgue permet de pouvoir intégrer des fonctions qui ne pouvait l'être avec l'intégrale de Riemann et son approche géométrique. Un tout nouveau de type de fonctions apparaît donc qui sont les fonctions intégrables au sens de Lebesgue. C'est un ensemble beaucoup plus gros que les fonctions intégrable au sens de Riemann. Cependant, l'intégrale de Lebesgue étant destinée à améliorer l'intégrale de Riemann, toutes les fonctions intégrables au sens de Riemann le sont également au sens de Lebesgue et pour ces fonctions là, les deux intégrales coïncident.

Mais l'introduction de la théorie de l'intégration de Lebesgue est largement hors programme. Elle nécessite de faire des excursions dans des pans des mathématiques qui ne sont pas une priorité pour nous cette année. Cependant, vous verrez quelques éléments constitutifs de l'intégrale de Lebesgue en seconde année avec l'introduction à la topologie et les tribus.

L'intégrale de Lebesgue a permis le développement et la formalisation de la théorie des probabilités, entre autres choses.

> L'homme, cet arrière-neveu du limaçon qui rêva de justice et inventa le calcul intégral.
>
> *Jean Rostand (1894-1977)*

> Nature laughs at the difficulties of integration.
>
> *Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)*

Table des matières

On va dans ce chapitre développer une méthode de construction toute mathématique. C'est une méthode très classique en maths, mais assez difficile conceptuellement parlant. C'est une méthode qui revient régulièrement.

On va commencer par définir ce que c'est une intégrale pour une fonction constante. Une fois ce sera fait, on va étendre cette notion aux fonctions en escalier, c'est-à-dire aux fonctions constantes sur des intervalles. Cette extension sera un peu pénible formellement. Une fois que ce sera fait, on utilisera un théorème d'approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier. Grâce à ce théorème, on pourra définir l'intégrale d'une fonction continue comme la limite des intégrales de la suite de fonctions en escalier qui converge notre fonction continue. Ce sera un point délicat et un peu délicat dans la mesure où le théorème centrale d'approximation n'est pas au programme.

Il faudra retenir le schéma de construction, le principe générale de construction des intégrales dans son ensemble, plus que les détails.

Une fois la notion d'intégrale d'une fonction continue établie, on pourra reprendre notre étude classique en donnant toutes les propriétés de l'intégration. Bien sûr, ces propriétés seront héritées de celles des intégrales des fonctions en escalier par passage à la limite. Il faudra donc prendre des précautions. Ce sera délicat. On ne passe pas à la limite n'importe comment, brutalement.

On se contentera dans ce chapitre de n'intégrer que des fonctions sur des segments. On s'affranchit ainsi des problèmes "aux bords". Ces problèmes seront étudiés l'année prochaine avec les intégrales impropres. Pour le moment, nous nous contenterons de mettre en place la théorie de base de l'intégration, donc sur un segment, pour éviter tout problème superflus. Puis l'année prochaine, ces notions seront étudiées avec des problèmes de définition supplémentaires.

1 Continuité uniforme

On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle était dite continue sur I si

$$\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

(La formulation sous cette forme précise est intentionnelle ici).

Définition 1.1 (Uniforme continuité) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{K}$.
On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x, y \in I,\ |x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque :
On notera la similarité entre les deux définitions, mais plus important encore, les différences entre les deux.

La continuité (tout court) est une notion ponctuelle (éventuellement en tous les points d'un intervalle, mais elle reste relative à un point $a \in I$). Le $\eta > 0$ de la définition de la continuité va dépendre du point a que l'on considère (et de ε évidemment) et pourra donc changer en fonction des contraintes imposés par la fonction et le point a.

Plus précisément, plus la fonction aura une "variation importante" au voisinage de a et plus il faudra prendre un η petit pour que les images reste dans le voisinage de $f(a)$. Le choix de η n'est alors pas uniforme (pas constant) sur tous l'intervalle I. La "qualité" de la continuité ne sera pas la même en tous les points de l'intervalle.

La continuité uniforme donne au contraire une certaine régularité dans la "qualité" de la continuité. Le choix du η que l'on peut faire ne dépend plus du point que l'on considère (mais seulement de ε et de l'intervalle, bien entendu). On peut trouver une taille de voisinage pour laquelle, en tous les points, en étant dans un voisinage de ce point de la taille mentionnée, les images sera automatiquement dans un voisinage de l'image du point considéré. Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta >,\ \forall a \in I,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui force f à ne pas avoir de trop grande différences de variations au voisinage des points de I. Il y a une forme d'uniformité dans la qualité de la continuité (intuitivement, une fonction discontinue est une fonction avec une trop grande variation en un point, une variation infinie en ce point).

Proposition 1.1 (Continuité et uniforme continuité) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{K}$.
Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration :
C'est un jeu sur les quantificateurs. Si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{ t.q. } \forall a, x \in I,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$, alors

$$\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Dans la première situation, le η ne dépend pas de a. Il est facile alors de le rendre artificiellement dépendant (il ne l'est toujours pas) de a. Ce qui donne la continuité. □

Remarque :
Attention ! On peut faire apparaître de "fausses" dépendances facilement, mais la réciproque est fausse ! Si un objet dépend d'un autre, on ne peut pas (en général), le rendre indépendant. Il est plus difficile d'être indépendant que dépendant. L'indépendance est plus restrictive et nécessite de s'assurer de l'effective indépendance, que le choix de l'un n'influencera pas l'autre. En revanche, le contraire ne nécessite rien. Si un objet est un indépendant d'un autre, on peut dire que le choix du second influence le premier sans que ça soit le cas. S'il n'y a pas d'influence, c'est qu'il y en a une qui est nulle. Donc qu'il y a une influence.

Exemple 1.1 :
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si $\varepsilon > 0$, on prend $\eta = \varepsilon^2$. Alors, si $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x \leq y$, alors $x \leq y \leq y + 2\sqrt{x(y-x)} = (\sqrt{x} + \sqrt{y-x})^2$. Donc $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y-x}$ par croissance. D'où $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{y-x}$. Donc si $|x - y| \leq \varepsilon^2$, alors $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$.

!!! ATTENTION !!!

La réciproque est évidemment fausse ! La continuité uniforme entraîne la continuité "simple" mais la continuité simple n'entraîne absolument pas la continuité uniforme.
Tout dépend de l'intervalle choisi.

Contre-exemple :
La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, si $\eta > 0$, on pose $x = \eta + 1/\eta$ et $y = 1/\eta$, alors $|x - y| = \eta$ et $|x^2 - y^2| = \eta^2 + 2 > 2$. Mais évidemment, elle est continue sur $\mathbb{R}$.
En revanche, $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur tout segment $[-a, a]$ avec $a > 0$. En effet, $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $[-a, a]$ et la dérivée est majorée en valeur absolue par $2a$. Donc en appliquant l'inégalité des accroissements finis, $x \mapsto x^2$ est $2a$-lipschitzienne sur $[-a, a]$. Par conséquent, si on choisi $\varepsilon > 0$, en prenant $\eta = \frac{\varepsilon}{2a} > 0$, on a alors $\forall x, y \in [-a, a]$, si $|x - y| \leq \eta = \frac{\varepsilon}{2a}$, on a alors $|x^2 - y^2| \leq 2a|x - y| \leq \varepsilon$. Et donc $x \mapsto x^2$ est donc bien uniformément continue sur $[-a, a]$.

Proposition 1.2 (Caractérisation séquentielle de la continuité uniforme) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{K}$.
Alors on a équivalence entre

(i) f est uniformément continue sur I

(ii) $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$, $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Démonstration :
Supposons f uniformément continue sur I. Soit $(x_n), (y_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Par uniforme continuité de f sur I, on sait que $\exists \eta > 0$ tel que $\forall a, b \in I$, si $|a - b| \leq \eta$, alors $|f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$. En particulier, on sait, par définition de la convergence de suites que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|x_n - y_n| \leq \eta$. Dans ce cas, par continuité uniforme de f sur I, $\forall n \geq n_0$, $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$ (car $x_n, y_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Et donc, par définition de la convergence de suites, $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On va montrer la contraposée de la réciproque. Supposons donc que f ne soit pas uniformément continue sur I. Donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0$, $\exists x, y \in I$ tels que $|x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $\eta = \frac{1}{n+1}$, on construit $x_n, y_n \in I$ tels que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. On construit donc $(x_n), (y_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $\square$

Exemple 1.2 :
On peut retrouver l'uniforme continuité de la $x \mapsto \sqrt{x}$ un peu plus facilement : soit $(x_n), (y_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \to 0$. On pose $a_n = \max(x_n, y_n)$ et $b_n = \min(x_n, y_n)$. Alors $a_n - b_n \to 0$ et $b_n \leq a_n$. Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{a_n, b_n\} = \{x_n, y_n\}$. Donc sans perte de généralités et quitte à raisonner sur

(a_n) et (b_n), on pourrait supposer $0 \leq x_n \leq y_n$. Mais donc $(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 = a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} \leq a_n + b_n - 2b_n = a_n - b_n$. Donc $\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \to 0$. Et par suite

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}| = \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \leq \sqrt{a_n - b_n} = \sqrt{|x_n - y_n|} \to 0$$

Proposition 1.3 (Continuité uniforme et opérations) :
Une combinaison linéaire et la composée d'applications uniformément continues est uniformément continue.

Remarque :
En particulier, si on note $\mathcal{C}_u(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications uniformément continues sur I, alors $\mathcal{C}_u(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration :
Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire pour avoir la structure d'ev. C'est plus facile encore pour la composée. $\square$

Remarque :
Il n'y a pas de notation usuelle ou canonique pour l'ensemble des fonctions uniformément continues. On verra un peu plus bas l'ensemble des fonctions continues par morceaux que l'on notera $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$. Par analogie des notations, il est alors raisonnable de noter $\mathcal{C}_u(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues uniformément sur I. Mais cette notation n'est absolument pas canonique. Et il n'y en a pas (à ma connaissance). Il faut donc redéfinir cette notations si vous en avez besoin.

Comme il n'y a pas de notations pour les fonctions uniformément continues, il convient de définir la notation en début de rédaction.

!!! ATTENTION !!!

⚠ L'ensemble des fonctions uniformément continues n'est pas stable par produit et encore moins par quotient !

Contre-exemple :
$x \mapsto x$ est clairement uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne l'est pas (la pente est trop forte au voisinage de 0). En effet, si on prend $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{2}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n}$, alors $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = -n/2 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Théorème 1.4 (Théorème de Heine) :
Toute fonction continue (simplement) sur un segment y est uniformément continue.

i.e. Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Démonstration :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue. Supposons f non uniformément continue. Donc $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists (x_n), (y_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq n_0$ tel que $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

En particulier, les suites (x_n) et (y_n) sont bornées. Donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire des sous-suites convergentes, *i.e.* $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extraction telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge. Alors $(y_{\varphi(n)})$ est une suite bornée (sous-suite d'une suite bornée). Donc par Bolzano-Weierstrass, $\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ converge. Et dans ce cas, $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ est une sous-suite de $(x_{\varphi(n)})$, donc $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ converge également et de même limite que $(x_{\varphi(n)})$.

Mais, en tant que sous-suite d'une suite convergente, on a toujours $x_{\varphi\circ\psi(n)} - y_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc les suites $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ et $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ ont la même limite, par unicité de la limite et linéarité de la limite sur les suites convergentes. Soit ℓ la limite commune de $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ et $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$. Par passage à la limite dans les inégalités, on a également $\ell \in [a,b]$. Donc f est défini en ℓ.

f est continue sur $[a,b]$, donc par caractérisation séquentielle de la continuité, on a $f(x_{\varphi\circ\psi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ et $f(y_{\varphi\circ\psi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. D'où $f(x_{\varphi\circ\psi(n)}) - f(y_{\varphi\circ\psi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Et donc contradiction avec la non continuité uniforme. $\square$

Exemple 1.3 :
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$ mais elle est uniformément continue sur tout intervalle de la forme $[1/n, n]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

!!! ATTENTION !!!

Il faut obligatoirement un segment (un intervalle fermé borné). Ça ne fonctionne pas sur un intervalle ouvert, car on peut retrouver des problèmes de “pentes trop fortes” au voisinage d'une borne de l'intervalle.

Contre-exemple :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-a)(x-b)}$ est continue sur $]a, b[$ mais n'est pas uniformément continue sur $]a, b[$. En effet, en posant par exemple $x_n = a+1/n$ et $y_n = a+2/n$, on a $x_n - y_n \to 0$ mais

$$|f(x_n)-f(y_n)| = \left|\frac{n}{a-b+1/n} - \frac{n}{2(a-b+2/n)}\right| = \left|\frac{n(a-b)+3}{2(a-b+1/n)(a-b+2/n)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Proposition 1.5 (Les fonctions lipschitzienne sont uniformément continue) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est lipschitzienne sur I, alors f est uniformément continue sur I.

Démonstration :
Il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$. □

Remarque :
Il est possible de généraliser la lipschitziannité avec les fonctions hölderiennes. On peut définir les fonctions α-hölderienne par

$$\exists k, \alpha > 0,\ \forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^{\alpha}$$

Les fonctions lipschitzienne sont alors des fonction 1-hölderienne.
Et dans ce cas, toute fonction hölderienne est uniformément continue.

On a donc :

f lipschitzienne ($\Longrightarrow$ f hölderienne) $\Longrightarrow$ f uniformément continue $\Longrightarrow$ f continue et ce ne sont que des implications. Les réciproques sont toutes fausses.

!!! ATTENTION !!!

Les réciproques précédentes sont fausses.

Contre-exemple :
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais elle n'est pas lipschitzienne. En effet, si on suppose qu'elle st k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\forall x, y \geq 0$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x-y|$. En particulier, pour $y = 0$, $\forall x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq kx$. Et donc $\forall x > 0$, $1 \leq k\sqrt{x}$ ce qui est clairement faux (cela voudrait dire que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ serait borné sur $\mathbb{R}_+^*$).

Remarque (IAF) :
On rappelle que toute fonction dérivable sur un intervalle dont la dérivée est bornée sur cet intervalle vérifie l'inégalité des accroissements finis et est automatiquement lipschitzienne.

Dans un version un peu plus faible : toute fonction dérivable sur un segment est automatiquement lipschitzienne sur le segment.

Remarque :
On pourrait pousser un peu plus loin l'étude des fonctions uniformément continues. Elles joueront un rôle beaucoup importants l'année prochaine dans l'étude des séries et suites de fonctions.

Exemple 1.4 (X MP) :
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue possédant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 1.5 (X MP) :
Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue.

Montrer que f est bornée.

2 Fonctions continues par morceaux

Dans cette première partie, on va d'abord développer les outils qui vont nous permettre de construire l'intégrale d'une fonction. Ces outils ne serviront pas seulement qu'à la construction de l'intégrale. Ils auront leurs utilités en analyse de deuxième année.

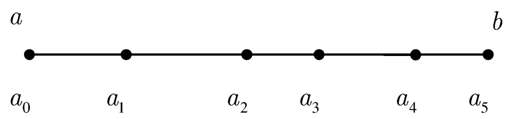
Par ailleurs, la construction de l'intégrale proposée ici est un raisonnement classique qui intervient régulièrement en mathématique.

2.1 Subdivision d'un segment

Définition 2.1 (Subdivision d'un segment) :
Soit $a < b$. On appelle subdivision du segment $[a, b]$ toute famille fine de réels $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que

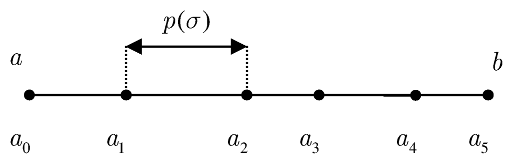
$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

Les a_i sont appelés points de la subdivision σ et les intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ sont appelés intervalles de lasubdivision σ.



Définition 2.2 (Pas d'une subdivision) :
Soit $a < b$ et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle pas de la subdivision σ le réel

$$p(\sigma) = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$$



Définition 2.3 (Support d'une subdivision) :
Soit $a < b$ et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$.

On appelle support de la subdivision σ l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{a_0, \dots, a_n\}$$

Proposition 2.1 (Unicité d'une subdivision à un support donné) :
Soit $a < b$ et S un ensemble fini contenant a et b.

Alors il existe une unique subdivision σ de $[a, b]$ telle que $\mathrm{Supp}(\sigma) = S$.

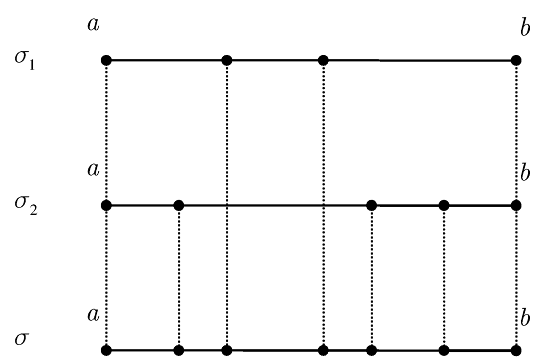
Démonstration :
Soit $n = \mathrm{Card}(S)$.

On note $a_0 = \min S = a$, puis $a_1 = \min(S \setminus \{a_0\})$ et par récurrence $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $a_{i+1} = \min(S \setminus \{a_0, \dots, a_i\})$. Alors $a_n = b = \max S$ et $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. Et on considère donc la subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$. Clairement, $\mathrm{Supp}(\sigma) = S$. Et cette méthode est la seule façon pour obtenir une subdivision (il faut et il suffit d'ordonner les éléments de S). $\square$

Définition 2.4 (Subdivision plus fine, réunion de subdivisions) :
Soit $a < b$ et σ_1, σ_2 deux subdivision de $[a, b]$.

On dit que σ_1 est plus fine que σ_2 si $\mathrm{Supp}(\sigma_2) \subset \mathrm{Supp}(\sigma_1)$. Autrement dit, si σ_1 contient les mêmes points que σ_2 avec des points en plus.

On appelle subdivision réunion de σ_1 et σ_2 la subdivision σ de support $\mathrm{Supp}(\sigma_1) \cup \mathrm{Supp}(\sigma_2)$.



Proposition 2.2 :
La réunion de deux subdivisions d'une segment est plus fine que chacune des deux subdivisions de départ

Démonstration :
En effet

$$\mathrm{Supp}(\sigma_1) \subset \mathrm{Supp}(\sigma_1) \cup \mathrm{Supp}(\sigma_2)$$

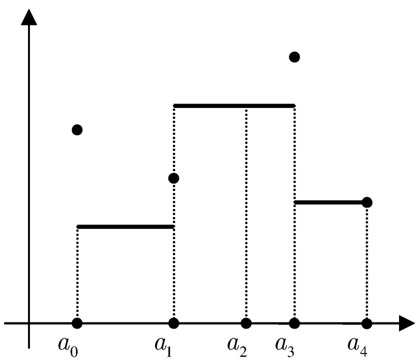
et
$$\mathrm{Supp}(\sigma_2) \subset \mathrm{Supp}(\sigma_1) \cup \mathrm{Supp}(\sigma_2)$$

$\square$

2.2 Fonctions en escalier

Définition 2.5 (Fonction en escalier, subdivision adaptée à une fonction en escalier) :

- Soit $a < b$. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est constante.
- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, on appelle subdivision adaptée à f une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ telle que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est constante.
- On note $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.



Remarque :
Les valeurs prises par une fonction en escalier aux points de la subdivision n'a aucune importance. Ce qui importe seulement, c'est que la fonction soit constante sur les intervalles ouverts.

Exemple 2.1 :
Les fonctions

$$\begin{array}{ccc} [-3.5, 2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} [-3.5, 2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

sont des fonctions en escalier. La subdivision $\sigma = (-3.5, -3, -2, -1, 0, 1, 2)$ est adaptée aux deux fonctions.

Remarque :
Les fonctions constantes sont des fonctions en escalier. Et n'importe quelle subdivision est adaptée à ces fonctions.

Proposition 2.3 :
Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et σ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.
Alors toute subdivision plus fine que σ est encore adaptée à f.

Démonstration :
Il suffit de l'écrire. Ce n'est pas drôle, pas très dur et pas très palipitant. Un dessin devrait vous en persuader assez vite. $\square$

Proposition 2.4 (Structure de l'ensemble des fonctions en escalier) :
Soit $a < b$.
$\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-ev vérifiant en plus

$$\forall f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}),\ \ fg, |f| \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$$

Démonstration :
On ne va faire que les deux nouveaux points. soit donc $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. Soit σ_f et σ_g deux subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et g respectivement. On note σ la subdivision réunion de σ_f et σ_g. Donc σ est adaptée à la fois à f et à g. Donc f et g sont constantes sur chacun des intervalles de σ donc fg et $|f|$ également (ce n'était pas la peine pour $|f|$). $\square$

Proposition 2.5 (Restriction d'une fonction en escalier) :
Soit $a \leq c < d \leq b$.
Si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, alors $f\big|_{[c,d]} \in \mathcal{E}([c,d],\mathbb{R})$.

Autrement dit, les fonctions en escalier restent en escalier par restriction.

Démonstration :
Il suffit de considérer une subdivision adaptée à f puis la subdivision de support $\{a, c, d, b\}$ et la subdivisions réunion des deux. $\square$

2.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 2.6 (Fonction continue par morceaux (cpm)) :
Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. f est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \begin{cases} f|_{]a_k,a_{k+1}[} \text{ continue} \\ f \text{ a des limites finies à droite en } a_k \text{ et à gauche en } a_{k+1} \end{cases}$$

On dit alors que σ est une subdivision adaptée à f. On note $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

On peut reformuler ça aussi sous la forme

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \begin{cases} f|_{]a_k,a_{k+1}[} \in \mathcal{C}^0(]a_k, a_{k+1}[, \mathbb{K}) \\ f|_{]a_k,a_{k+1}[} \text{ prolongeable par continuité sur } [a_k, a_{k+1}] \end{cases}$$

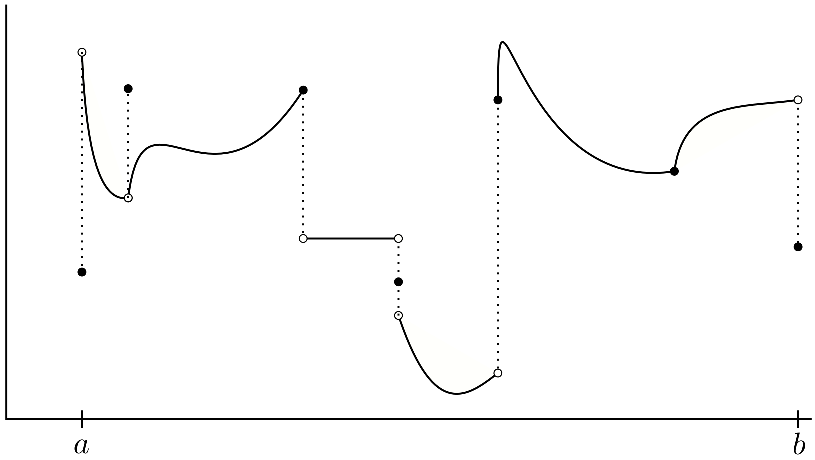
Remarque :
La notation $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ n'est pas canonique. Aucune notation n'est imposée dans les programmes (ni en MPSI ni en MP). Il y a essentiellement deux notations en usage : $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ que j'utiliserais par cohérence avec les notations utilisées en deuxième année ; et la notations $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. Aucune ne semble faire plus consensus que l'autre.

Il est donc recommandé de définir la notation utilisée au début d'une sujet si celle-ci n'est pas imposée par le sujet. Évidemment, si le sujet impose une notation particulière, il convient de l'adopter.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Comme pour les fonctions en escalier, on ne dit rien de ce que fait f sur les points de la subdivision. Ces points peuvent correspondre à des points de discontinuité. En particulier, prendre garde à la seconde formulation : on ne dit pas que f doit être continue en les a_k. Ni même que la limite à gauche et à droite en a_k doivent être les mêmes.

Exemple 2.2 :



Exemple 2.3 (Centrale MP) :
La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sin(1/x) & x \in]0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est-elle continue par morceaux ?

> Définition 2.7 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle) :
> Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{K}$.
> On dit que f est continue par morceaux sur I si sa restriction à tout segment de I est continue par morceaux, *i.e.* si $\forall a, b \in I$ avec $a < b$, $f|_{[a,b]} \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$.

Remarque :
En particulier, on a $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$.

Proposition 2.6 (Structure des fonctions continues par morceaux) :
Soit $a < b$. Alors $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, *i.e.* $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel stable par produit.
De plus, si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$, alors $|f| \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$.

Démonstration :
C'est assez évident intuitivement. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la démo pour les fonctions en escaliers et de l'adapter un tout petit peu. ☐

Proposition 2.7 (Fonctions cpm et manipulations fonctionnelles) :
En modifiant une fonction cpm en un nombre fini de points, on obtient encore une fonction cpm.

La restriction d'une fonction cpm est encore une fonction cpm.

Démonstration :
C'est évident en écrivant la définition et en prenant une subdivision adapté à la fonction et à l'intervalle de la restriction. ☐

Remarque :
Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ et si $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ est une subdivision adaptée à f, alors f est uniformément continue sur $]a_k, a_{k+1}[$, bornée sur $]a_k, a_{k+1}[$ (mais n'atteint pas forcément ses bornes), bornée sur $[a, b]$ (et atteint ses bornes mais n'est pas continue sur $[a, b]$ a priori).

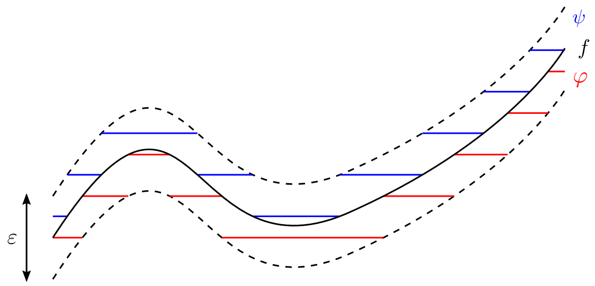
Remarque :
On peut définir des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux également par analogies. On dit que $f \in \mathcal{C}^k_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ s'il existe une subdivision de $[a, b]$ pour laquelle, les restrictions de f à tous les intervalles ouverts définis par deux points successifs de la subdivision sont de classe $\mathcal{C}^k$

Remarque :
On peut étendre ces définitions pour beaucoup d'autres propriétés de fonctions. Par exemple, on peut définir les fonctions affines par morceaux.

2.4 Approximation uniforme par des fonctions en escalier (HP ?)

Théorème 2.8 (Approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier) :
Soit $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ tels que

$$\varphi \leq f \leq \psi \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$$



Ce théorème permet donc de pouvoir approcher avec la précision que l'on veut, n'importe quelle fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier au dessus et en dessous de la fonction. On encadre donc la fonction par deux fonctions en escalier avec un écart aussi petit que l'on veut.

Démonstration :
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Par théorème de Heine, on sait que f est uniformément continue sur $[a,b]$. Donc

$$\exists \eta > 0,\ \forall x,y \in [a,b],\ |x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On choisit alors une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ de pas $h \leq \eta$.

Soit $k \in \{0,\dots,n\}$. Par restriction, f est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$. Donc, par théorème des bornes atteintes, f est bornées et atteint ses bornes sur $[a_k, a_{k+1}]$. Soit $m_k, M_k \in \mathbb{R}$, $c_k, d_k \in [a_k, a_{k+1}]$ tels que $\forall x \in [a_k, a_{k+1}]$, $m_k = f(c_k) \leq f(x) \leq f(d_k) = M_k$. En particulier, $0 \leq M_k - m_k = |f(c_k) - f(d_k)| \leq \varepsilon$ (car le pas de la subdivision est $h \leq \eta$).

On définit alors

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \begin{cases} m_k & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases} \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \begin{cases} M_k & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases} \end{array}$$

Alors φ et ψ sont en escalier (et σ est adaptée à φ et ψ).

De plus, si $x \in [a,b[$, alors $\exists k \in \{0,\dots,n\}$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$. Si $x = a_k$, alors $\varphi(a_k) = f(a_k) \leq f(x) \leq f(a_k) = \psi(a_k)$. Et $\psi(a_k) - \varphi(a_k) = 0 \leq \varepsilon$. Si $x \in]a_k, a_{k+1}[$, alors $m_k = \varphi(x) \leq f(x) \leq M_k = \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) = M_k - m_k \leq \varepsilon$.

D'où le résultat. $\square$

Théorème 2.9 (Approximation uniforme des fonctions cpm par des fonctions en escalier) :
Soit $a < b$ et $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$.
Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

Démonstration :
Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Chaque $f_{|]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge par continuité en une fonction continue f_k sur $[a_k, a_{k+1}]$. On reprend le théorème d'approximation uniforme des fonctions en continue : on construit donc des fonctions en escalier φ_k et ψ_k telles que $\varphi_k \leq f_k \leq \psi_k$ et $\psi_k - \varphi_k \leq \varepsilon$.

On pose alors

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \varphi_k(x) & x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & x = a_k \end{cases} \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \psi_k(x) & x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & x = a_k \end{cases} \end{array}$$

Alors φ et ψ sont en escalier (et σ est adaptée à φ et ψ). Et si $x = a_k$, alors $\varphi(x) = f(a_k) \leq f(x) \leq f(a_k) = \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) = 0 \leq \varepsilon$. Si $x \in]a_k, a_{k+1}[$, alors $\varphi(x) = \varphi_k(x) \leq f_k(x) = f(x) \leq \psi_k(x) = \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) = \psi_k(x) - \varphi_k(x) \leq \varepsilon$.

D'où le résultat. □

Corollaire 2.10 :
Soit $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$.
Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ telle que $|f - \varphi| \leq \varepsilon$.

Démonstration :
Reprendre l'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier. L'une des deux fonctions fabriquées suffit. □

3 Construction de l'intégrale

On va maintenant définir l'intégrale d'une fonction en escalier. Ce qui ne va pas être très dur. C'est essentiellement des fonctions constantes. Ça ne va pas être très difficile. Géométriquement, ces intégrales vont correspondre aux aires des rectangles définis par les plateaux de la fonction en escalier.

Une fois ces intégrales définis comme il faut, on pourra passer aux intégrales des fonctions continues sur un segment. On utilisera le théorème précédent d'approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier. On va définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment comme étant la limite des intégrales des fonctions en escalier qui approchent la fonction (donc on va faire $\varepsilon \to 0$).

Ce passage est un peu délicat. Il faudra prendre des pincettes. Il va y avoir des passages à la borne sup et la borne inf qui vont se promener. Et on va déduire toutes les propriétés de l'intégral que vous connaissez déjà à partir des propriétés des intégrales des fonctions en escalier. Un peu plus précisément, de la définition facile des intégrales des fonctions en escalier, on va donner les propriétés de ces intégrales. Puis on va faire passer ces propriétés aux bornes sup et inf pour les avoir sur les intégrales des fonctions continues. C'est ce passage qui va être délicat.

Officiellement, "aucune construction [de l'intégrale] n'est imposée". Mais les fonctions en escaliers sont au programme. Donc on va ici construire les intégrales proprement, sans trop toutefois insister sur cette construction. Elle est intéressante d'un point de vue pédagogique et pour la culture, mais son intérêt se borne à ça. Dès qu'on aura définit l'intégrale d'une fonction continue et donné les propriétés de bases, on ne reparlera plus de fonctions en escalier.

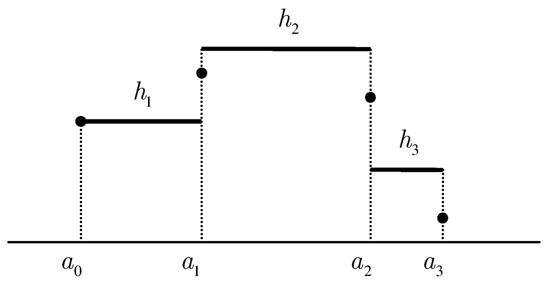
Les démonstrations des propriétés des intégrales des fonctions en escalier seront un peu incomplète. On insistera pas trop et on se contentera d'un point de vue intuitif bien détaillé.

3.1 Intégrale d'une fonction en escalier

3.1.1 Définition

Soit $a < b$ et $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. Soit h_i la valeur de f sur l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$. On pose

$$I_{[a,b]}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i(a_{i+1} - a_i)$$



Le réel $I_{[a,b]}(f)$ est appelé intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$.

Ce réel est indépendant de la subdivision σ que l'on choisi.

En effet, si on ajoute un point à la subdivision σ, il est facile de voir que l'on ne change rien. Par récurrence, on montre que la valeur de $I_{[a,b]}(f)$ est inchangé pour deux subdivision dont l'une est plus fine que l'autre (la plus fine est obtenue en ajoutant un nombre finie de point à la moins fine). Puis, si on prend deux subdivisions adaptée à f, les intégrales de f qu'elles définissent sont égales à l'intégrale de f calculée avec la réunion des deux subdivision. Donc les deux intégrales de départ sont égales et donc l'intégrale d'une fonction en escalier ne dépend pas de la subdivision choisie.

Géométriquement, $I_{[a,b]}(f)$ correspond donc aux aires algébriques (donc avec un signe) des rectangles définies par les points de discontinuité de f.

Remarque :
On notera que seul les valeurs des plateaux nous intéressent. Les valeurs que prend la fonction en escalier en ses points de discontinuité (donc aux extrémités des plateaux) importe peu. Ces valeurs n'ont aucune incidence sur la valeur de l'intégrale.

Exemple 3.1 :
Calculer l'intégrale de la fonction $f \ : \begin{array}{ccc} [-1,1/2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor 4x+1 \rfloor \end{array}$.

3.1.2 Propriété

Proposition 3.1 :
L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & I_{[a,b]}(f) \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$

Démonstration :
Soit $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\sigma_f = (a_0, \ldots, a_n)$ et σ_g des subdivisions adaptée à f et g. Alors σ_f est encore adaptée à λf. On note h_i les valeurs prises par f sur les intervalles définis par la subdivision σ_f. Alors λf prend les valeurs λh_i et

$$I_{[a,b]}(\lambda f) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda h_i (a_{i+1} - a_i) = \lambda I_{[a,b]}(f)$$

On pose maintenant σ la réunion de σ_f et de σ_g. On pose k_i et ℓ_i les valleurs prises par f et g respectivement sur les intervalles définis par $\sigma = (x_0, \ldots, a_m)$. σ est adaptée à $f+g$ et prend les valeurs $k_i + \ell_i$ sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. Alors

$$I_{[a,b]}(f+g) = \sum_{i=0}^{m-1} (k_i + \ell_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{m-1} k_i (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=0}^{m-1} \ell_i (x_{i+1} - x_i) = I_{[a,b]}(f) + I_{[a,b]}(g)$$

$\square$

Proposition 3.2 :
Soit $a < b$ et $f, g \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$.

(i) Si $f \geq 0$, alors $I_{[a,b]}(f) \geq 0$

(ii) Si $f \leq g$, alors $I_{[a,b]}(f) \leq I(g)$

Démonstration :

(i) Comme toujours, soit σ une subdivision adaptée à f et h_i les valeurs que prend f sur les intervalles définis par σ. Donc $\forall i$, $h_i \geq 0$ et donc la somme qui permet de calculer $I_{[a,b]}(f)$ est positive.

(ii) Il suffit de considérer $h = g - f$ qui est une fonction en escalier positive. Et donc $I_{[a,b]}(h) = I_{[a,b]}(g) - I_{[a,b]}(f) \geq 0$

□

Proposition 3.3 :
Soit $a < c < b$ et $f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$. Alors

$$I_{[a,b]}(f) = I_{[a,c]}(f) + I_{[c,b]}(f)$$

Démonstration :
Soit σ une subdivision adaptée à f. On rajoute c au support de σ. On obtient donc la subdivision $\sigma' = (a_0, \ldots, a_n)$ qui est plus fine que σ (éventuellement égale si c était déja dans le support de σ). On note $p \in \{0, \ldots, n\}$ l'entier tel que $a_p = c$. On note h_i les valeurs prises par f sur les intervalles définis par σ'. Alors

$$I_{[a,b]}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i(a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=0}^{p-1} h_i(a_{i+1} - a_i) + \sum_{i=p}^{n-1} h_i(a_{i+1} - a_i) = I_{[a,c]}(f) + I_{[c,b]}(f)$$

puisque $(a_0, \ldots, a_p)$ et $(a_p, \ldots, a_n)$ définissent respectivement des subdivisions de $[a,c]$ et $[c,b]$. □

Exemple 3.2 :
Calculer l'intégrale de la fonction

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\lfloor 3x - 1 \rfloor \end{array}$$

3.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Proposition 3.4 (Construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux (HP ?) [✓]) :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On pose $\Phi = \{\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \varphi \leq f\}$ et $\Psi = \{\psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), f \leq \psi\}$.

Alors $\alpha = \sup\{I_{[a,b]}(\varphi), \varphi \in \Phi\}$ et $\beta = \inf\{I_{[a,b]}(\psi), \psi \in \Psi\}$ existent et $\alpha = \beta$.

Démonstration :
On note $I_{\inf} = \{I_{[a,b]}(\varphi), \varphi \in \Phi\}$ et $I_{\sup} = \{I_{[a,b]}(\psi), \psi \in \Psi\}$.

Comme f est continue sur un segment, elle est bornée. Donc $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f \leq M$. La fonction constante égale m est une fonction en escalier de Φ et la fonction constante égale à M est une fonction en escalier de Ψ. $I_{\inf}$ et $I_{\sup}$ sont non vides.

D'autre part, on a $\forall \varphi \in \Phi$, $\varphi \leq f \leq M$. Donc $I_{[a,b]}(\varphi) \leq I_{[a,b]}(M) = M(b - a)$. Donc $I_{\inf}$ est majoré. C'est une partie non vide et majoré de $\mathbb{R}$, donc, par propriété de la borne sup de $\mathbb{R}$, $\alpha = \sup I_{\inf}$ existe. De même, $m(b - a)$ est un minorant de $I_{\sup}$ et donc $\beta = \inf I_{\sup}$ existe.

Pour tout $\varphi \in \Phi$ et tout $\psi \in \Psi$, on a $\varphi \leq f \leq \psi$. Donc $\forall \varphi \in \Phi$, $\forall \psi \in \Psi$, $I_{[a,b]}(\varphi) \leq I_{[a,b]}(\psi)$. Donc, si on fixe $\varphi_0 \in \Phi$, $I_{[a,b]}(\varphi_0)$ est un minorant de $I_{\sup}$ et donc, par définition de la borne inf, $I_{[a,b]}(\varphi_0) \leq \beta$. Mais ce raisonnement est valable pour tout $\varphi_0 \in \Phi$. Donc β est un majorant de $I_{\inf}$ et donc, par def de la borne sup, $\alpha \leq \beta$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tel que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $0 \leq \psi - \varphi \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ par le théorème 2.8 d'approximation par des fonctions en escalier. Donc $\varphi \in \Phi$ et $\psi \in \Psi$. Donc, d'après le paragraphe précédent et par définition de α et β, $I_{[a,b]}(\varphi) \leq \alpha \leq \beta \leq I_{[a,b]}(\psi)$. D'autre part, $0 \leq \psi - \varphi \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ nous donne $0 \leq I_{[a,b]}(\psi) - I_{[a,b]}(\varphi) \leq \varepsilon$, par linéarité de l'intégrale des fonctions en escaliers. On a donc $I_{[a,b]}(\psi) \leq I_{[a,b]}(\varphi) + \varepsilon$. On en déduit donc $\beta \leq \alpha + \varepsilon$. Et cette inégalité est vraie quel que soit $\varepsilon > 0$. Et en passant à la limite $\varepsilon \to 0$ par exemple (ou en utilisant la bornes inf de $\mathbb{R}_+^*$), on obtient $\beta \leq \alpha$.

D'où l'égalité. $\square$

Définition 3.1 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux) :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ cette même valeur commune de la proposition précédente. On la note

$$\int_{[a,b]} f(t)dt$$

Remarque :
Attention, pour le moment, on notera $\int_{[a,b]} f$ pour distinguer avec l'intégrale dans laquelle on peut mettre les bornes un peu où l'on veut. On a pas encore gagné ce droit. Et ce n'est pas trivial de pouvoir le faire. L'intégrale étant la valeur commune d'une borne et d'une borne sup. Vu la définition et la construction de l'intégrale, il n'est pas du tout clair que l'on puisse s'affranchir d'une façon quelconque de l'ordre dans lequel on donne les bornes de l'intervalle.

Remarque :
Notons que pour f constante, $\int_{[a,b]} f = I_{[a,b]}(f)$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ En pratique, il faudra TOUJOURS mettre le "dt". Il ne faudra surtout pas l'oublier. Cet élément permet de savoir par rapport à quelle variable on intègre. Le problème sera relativement mineure pour nous, mais l'année prochaine vous intégrerez des fonctions de plusieurs variables. Et selon quelle variable on intègre, on obtient pas le même résultat. Par exemple,

$$\int_{[0,1]} e^{tx^2} dt \qquad \text{et} \qquad \int_{[0,1]} e^{tx^2} dx$$

ne sont pas du tous les mêmes. La premières est très faciles à calculer (on verra comment un peu plus tard), alors que la seconde ne le peut pas.

Géométriquement, l'intégrale d'une fonction continue sur un segment est donc la limite de la somme de toutes les aires de tous les rectangles qu'on peut construire à partir de la courbe de la fonction. Autrement dit, si on considère la coure de la fonction, il suffit de découper l'intervalle en petit bout par une subdivision, faire des plateaux qui touchent la fonction à chaque borne de gauche de tous les petits intervalles de la subdivision choisis et faire la somme des aires des rectangles ainsi créés, puis de faire tendre le pas de la subdivision vers 0. Et donc, par construction l'intégrale de f s'interprète comme l'aire entre le graphe de f et l'axe des abscisses avec un signe suivant si le graphe est au-dessus ou en-dessous.

C'est donc la limite de la somme des rectangles sous la courbe (ou au-dessus de la courbe). C'est essentiellement la méthode d'approximation par des rectangles. A ceci près que dans la méthode des rectangles (*aka* sommes de Riemann), le pas de la subdivision est constant alors que dans la définition, par obligatoirement. Le pas peut ne pas être constant. Donc les intervalles définis par la subdivision peuvent ne pas être de la même longueur.

Remarque :
En fait, ce genre de construction est classique en mathématiques. D'autres types de fonctions du même genre que les fonctions en escalier sont utiles dans ces constructions. Par exemple, les fonctions continues par morceaux. Ce sont les même fonctions que les fonctions en escaliers, mais au lieu de leur imposer de faire des plateaux (donc d'être constante sur des intervalles), elles sont justes continues sur des intervalles. On peut alors montrer qu'on peut approcher uniformément une fonctions continue par des fonctions continues par morceaux.

Les polynômes sont très utiles également dans ces constructions. Un théorème de Weierstrass permet d'approcher uniformément une fonction continue sur un segment par des polynômes (il suffit de le faire avec les polynômes interpolateur de Lagrange). Comme les polynômes sont très faciles à utiliser, on peut par exemple définir un produit de convolution sur les polynômes, puis étendre cette notion aux fonctions continues grâce au théorème d'approximation de Weierstrass. Et c'est ce qui donne naissance aux approximations des calculs des intégrales des fonctions continues par la méthode des trapèzes ou de Simpson (polynôme de degré 1 et 2 respectivement).

Remarque :
Attention au sens des symboles et des lettres utilisés. La quantité $\int_{[a,b]} f(t)dt$ est un nombre et ne

dépend d'aucune variable. Il n'y a pas de variable ici. À l'intérieur de cette expression, il y a une variable muette qui ne sert à pouvoir lire l'expression. Un peu comme le nom de l'indice de sommation dans une somme. Donc

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{[a,b]} f(\xi)d\xi = \int_{[a,b]} f(\skull)d\skull$$

3.3 Premières propriétés de l'intégrale

3.3.1 Relation de Chasles

Théorème 3.5 (Relation de Chasles) :
Soit $a < c < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,c]} f(x)dx + \int_{[c,b]} f(x)dx$$

Démonstration :
Soit φ_1 une fonction escalier inférieure à $f\big|_{[a,c]}$ et φ_2 une fonction en escalier inférieure à $f\big|_{[c,b]}$. On définit alors φ sur $[a, b]$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{si } t \in [a,c] \\ \varphi_2(t) & \text{si } t \in]c,b] \end{cases}$$

Alors la fonction φ est une fonction en escalier inférieure à f sur $[a, b]$ (facile à vérifier). On a donc

$$I_{[a,b]}(\varphi) = I_{[a,c]}(\varphi) + I_{[c,b]}(\varphi) = I_{[a,c]}(\varphi_1) + I_{[c,b]}(\varphi_2)$$

et donc

$$I_{[a,c]}(\varphi_1) + I_{[c,b]}(\varphi_2) \leq \int_{[a,b]} f$$

Puis en passant à la borne $\sup$ en φ_1 et en φ_2, on a

$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \leq \int_{[a,b]} f$$

On opère de la même manière avec des fonctions en escalier supérieure à f et on obtient donc l'égalité

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

$\square$

Définition 3.2 (Extension formelle de l'intégrale) :
On étend la notion d'intégrale grâce à la relation de Chasles : Si I est un intervalle et $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ avec $a, b \in I$, on note

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(t)dt & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[b,a]} f(y)dy & \text{si } b < a \end{cases}$$

Remarque :
Cette définition provient de la manipulation formelle des intégrales avec un sens intuitif "naturel" des intervalles : $\int_{[a,a]} f = \int_{[a,a]} f + \int_{[a,a]} f$ et donc la nullité. Et à partir de là, $\int_{[a,a]} f = 0 = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,a]} f$, ce qui donne le signe qui apparaît en changeant le sens des bornes. Ceci, bien sûr, n'est pas correct. C'est une extension formelle, un jeu d'écriture. Dans cette "explication", on donne un sens à des choses qui n'en ont pas vraiment (l'intervalle $[a, b]$ avec $a > b$ par exemple).

On peut donc reprendre l'utilisation habituelle de l'intégrale. Évidemment, les résultats que nous avons donné avant la relation de Chasles et l'extension formelle de l'intégrale sont encore valable dans le cadre de cette extension. On ne le réécrie pas mais il faut savoir et on pourra donc les utiliser à notre guise.

Remarque :
On retrouve alors la relation de Chasles tel que vous l'avez vu dans les petites classes :

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux et $a, b, c \in I$, alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Dans cette version, des signes peuvent intervenir et sont pris en comptes par l'extension formelle de l'intégrale. Plus besoin de vérifier la position relative des a, b et c.

3.3.2 Linéarité

Théorème 3.6 (Linéarité de l'intégrale) :
Soit $a < b$.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t)dt \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$

Démonstration :
Soit $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supposons d'abord que $\lambda \geq 0$. Pour toute fonction en escalier φ sur $[a,b]$ inférieure à f, on a donc $\varphi \leq f$. D'où l'on déduit $\lambda\varphi \leq \lambda f$. D'où $I_{[a,b]}(\lambda\varphi) = \lambda I_{[a,b]}(\varphi) \leq \int_a^b \lambda f$ par la définition de l'intégrale de λf et de la linéarité de I pour les fonctions en escalier. Puis en passant à la borne sup sur $I(\varphi)$, on obtient $\lambda \int_a^b f \leq \int_a^b \lambda f$.

En partant d'une fonction ψ en escalier supérieure à f et en passant à la borne inf, on obtient alors $\int_a^b \lambda f \leq \lambda \int_a^b f$ et donc l'égalité.

Si $\lambda \leq 0$, en refaisant les mêmes opérations, toutes les inégalités que l'on obtient sont inversées. Mais on obtient quand même l'égalité puisqu'on a les inégalités dans les deux sens.

On refait le même principe. On considère φ_1 et φ_2 en escalier inférieure à f et g respectivement. Alors $\varphi_1 + \varphi_2$ est une fonction en escalier inférieure à $f+g$. Alors $I_{[a,b]}(\varphi_1+\varphi_2) = I_{[a,b]}(\varphi_1) + I_{[a,b]}(\varphi_2) \leq \int_a^b (f+g)$. En passant cette inégalité à la borne sup en φ_1 et φ_2 (attention, l'un après l'autre), on a $\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f+g)$.

On fait de la même manière avec des fonctions en escalier supérieurs à f et g et obtient donc

$$\int_a^b (f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

ce qui nous donne l'égalité désiré pour avoir la linéarité. □

Remarque :
La méthode pour démontrer les résultats en intégration sera souvent celle là. Il faut la retenir parce qu'elle peut être réutiliser ailleurs. C'est un raisonnement classique en maths que de construire quelque chose et démontré des propriétés en repassant à chaque fois par la construction. C'est ce qu'on a fait.

Donc dans les démonstrations à venir, on se ramènera sans cesse d'abord au cas des fonctions en escalier qui est plus simple à traiter. Puis on passera aux bornes inf et sup pour avoir des inégalités dans les deux sens et établir la propriété.

Proposition 3.7 (Modification en un nombre fini de points) :
Soit $a < b$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continue et g continue sauf en un nombre fini de points.

Si $f = g$ sauf en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$

Démonstration :
La fonction $f - g$ est une fonction nulle sauf en un nombre finis de points. C'est donc une fonction en escalier dont les plateaux sont nuls. Son intégrale est donc nulle. □

Remarque :
On ne change donc pas la valeur de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment en changeant un nombre fini de valeurs de la fonction. Cette remarque peut s'avérer très utile. En particulier, cela veut dire que la valeur prise par la fonction aux bornes de l'intervalle n'a pas d'importance. On pourrait donc considérer des fonctions définies sur $[a, b]$, continues seulement sur $]a, b[$, prolongeable par continuité en a et en b. On bien une fonction continue sur un segment sauf un point, mais prolongeable par continuité en ce point. Ou ...

Exemple 3.3 :
Donner un sens à $\int_0^1 x \ln(x) dx$.

Remarque (Intégrale impropre) :
Ce dernier exemple est le premier exemple d'intégrale impropre que vous verrez. Les intégrales impropre sont au programme de deuxième année. L'idée consiste essentiellement à prendre la suite de ce cours, c'est à dire d'essayer de donner un sens à une intégrale d'une fonction qui n'est pas définie en l'une des bornes de l'intégrale. C'est ce que l'on vient de faire. Vous verrez l'année prochaine des théorèmes vous permettant de le faire de façon plus efficace et vous pourrez alors donner un sens à une intégrale de la forme $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$.

3.3.3 Croissance et Positivité

Théorème 3.8 (Positivité et croissance de l'intégrale) :
Soit $a < b$ et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues par morceaux.

(i) Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$ [*Positvité*]

(ii) Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. [*Croissance*]

Démonstration :
Si $f \geq 0$, alors la fonction constante égale à 0 est une fonction en escalier inférieure à f, donc $0 \leq \int_a^b f$ par def de la borne sup.

Si $f \leq g$, alors $g - f \geq 0$ et donc, en appliquant la positivité puis la linéarité de l'intégrale, on a le résultat.

(Cette démo est encore plus facile à montrer une fois qu'on a le lien avec les primitives) □

Remarque :

Ce résultat est encore vrai si les inégalités sont vraies sauf en un nombre fini de points. Toujours grâce à la proposition 3.7. En particulier, si f est positive sur les intervalles définies par une subdivision adaptée à f et que f est négative sur les points de la subdivision.

On retiendra que le cas continue surtout.

Proposition 3.9 ([✓]) :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** de signe constant.

$$\int_a^b f = 0 \iff f = 0$$

Démonstration :
Si $f = 0$, alors elle est en escalier et donc $\int_a^b f = 0$ par définition des intégrales des fonctions en escaliers.

Pour la réciproque, on va montrer la contraposée et on suppose que $f \neq 0$. Sans perte de généralités, on peut supposer que $f \geq 0$ (quitte à multiplier par -1). Comme $f \neq 0$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$. Puis, par continuité de f, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [a, b] \cap [c - \eta, c + \eta]$, $f(x) > 0$. L'ensemble $[a, b] \cap [c - \eta, c + \eta]$ est intervalle fermé non réduit à un point. Donc, par théorème des bornes atteintes (car f continue), on en déduit $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a, b] \cap [c - \eta, c + \eta]$, $f(x) \geq \alpha > 0$. On considère alors l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in [a,b] \cap [c-\eta, c+\eta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors φ est une fonction en escalier et $f \geq \varphi$. Par définition des intégrales des fonctions continues, on en déduit donc

$$\int_a^b f \geq \int_a^b \varphi = \alpha\Big(\min(b, c + \eta) - \max(a, c - \eta)\Big) > 0.$$

□

Remarque :
Cette proposition se démontre encore plus facilement une fois le lien (pas encore fait) avec les primitives effectuées.

!!! ATTENTION !!!

⚠

Cette proposition ne fonctionne que si f est de signe constant ! Si ce n'est pas le cas, ça ne marche pas ! Par exemple, $\int_0^\pi \cos(t)dt = 0$ mais le cosinus n'est pas la fonction nulle !

!!! ATTENTION !!!

⚠

Cette proposition est fausse si f n'est pas continue (donc en particulier seulement continue par morceaux mais pas continue). Précisément parce qu'elle pourrait être négative aux points de la subdivision.

Corollaire 3.10 :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

(i) Si $\int_a^b |f| = 0$ alors $f = 0$

(ii) Si $\int_a^b f^2 = 0$ alors $f = 0$

Démonstration :
$|f|$ et f^2 sont des fonctions continues et positives sur $[a, b]$. En utilisant la proposition précédente, on en déduit donc le résultat. □

Exemple 3.4 ([✓]) :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si $f \geq 0$ et $f \neq 0$, montrer que $\int_a^b f > 0$

Remarque :
Cette proposition permet entre autre d'avoir des inégalités strictes entre intégrale. C'est très utile.

Remarque :
On rappelle qu'il ne faut pas confondre "f non nulle" et "f ne s'annule pas". Ce n'est pas du tout la même chose.

Corollaire 3.11 ([✓]) :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Si $\int_a^b f = 0$ alors f s'annule sur $]a, b[$ au moins une fois.

Démonstration :
Si f est de signe constant, alors f est la fonction nulle et donc elle s'annule bien (beaucoup de fois même).

Si f n'est pas de signe constant, alors f change de signe sur $]a, b[$ et la continuité de f nous permet d'appliquer le TVI qui nous donne un zéro de f. □

Exemple 3.5 :
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt = 0$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0, 1[$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ C'est faux si f n'est pas continue ! En effet, il suffit de prendre la fonction $f(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. Alors $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ et pourtant, elle ne s'annule pas.

3.3.4 Inégalités et intégrales

Théorème 3.12 (Inégalité triangulaire intégrale) :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Démonstration :
Ce théorème est un corollaire de la croissance de l'intégrale. En effet, on a toujours $-|f| \leq f \leq |f|$. Et donc, la croissance et la linéarité de l'intégrale, nous donne

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

d'où l'on déduit le résultat par un petit jeu sur les inégalités. □

Exemple 3.6 ([✓]) :
Soit $a < b$ et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_a^b |g|$$

Remarque :
L'exemple précédente est fondamental. Il intervient très (très) souvent dans les inégalités avec des intégrales. Souvent, il est plus appliqué, on a des expressions précises pour f et donc on peut calculer sa borne sup explicitement. Mais pas toujours.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention à bien prendre garde à l'ordre des bornes dans l'intégrale quand on fait des inégalités avec les intégrales. Avec la relation de Chasles, il peut y avoir un signe qui apparaît.

Exemple 3.7 :
Montrer que $\forall x \in [-1/2, 1/2]$,

$$\left|\int_0^x \cos(\pi t)dt\right| \geq |x|\cos(\pi x)$$

!!! ATTENTION !!!

Il faut bien prendre garde en manipulant les intégrales. Ce n'est pas très naturel ni intuitif. On dit très vite des bêtises. En particulier avec des inégalités. On ne prend jamais trop de précautions quand on manipule des intégrales.

Contre-exemple :
Un élève a rédigé le document suivant.

Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continue. Comme la fonction $\cos$ est comprise entre -1 et 1, on obtient

$$-\int_0^\pi f(t)dt \leq \int_0^\pi f(t)\cos(t)dt \leq \int_0^\pi f(t)dt.$$

En appliquant cette inégalité avec $f = \cos$, on obtient

$$-0 = -[\sin(t)]_0^\pi \leq \int_0^\pi \cos(t)^2 dt \leq [\sin(t)]_0^\pi = 0.$$

On en déduis donc

$$\int_0^\pi \cos(t)^2 dt = 0.$$

Or, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(t)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$. Donc

$$\int_0^\pi \cos(t)^2 dt = [t/2 - \frac{1}{4}\sin(2t)]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

On en conclut donc que $\pi = 0$.

Inutile de préciser qu'il y a une erreur quelque part. Mais où ?

Théorème 3.13 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) :
Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

Il y a égalité si, et seulement si, (f, g) est liée.

Remarque :
L'hypothèse "$a < b$" est ici superflue. En effet, si $a \geq b$, le signe qui intervient de l'interversion est absorbé (par le carré à gauche et le produit à droite). Il est d'usage (et recommandé de conservée toutefois cette hypothèse).

On peut réécrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz tous la forme :

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}$$

ATTENTION ! Ici, sous cette forme, il est nécessaire d'avoir $a < b$ pour que les intégrale sous les racines soient positives. Sans quoi, les racines ne sont pas définies.

Remarque :
Nous reverrons la généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens.

La démonstration de ce théorème est très astucieuse. Et elle utilise beaucoup des astuces d'analyse pour les intégrales. Cette démo est très formatrice. Elle sera faite dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens.

Démonstration :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \tag{1}$$

Or $(\lambda f + g)^2 \geq 0$ donc $\int_a^b (\lambda f + g)^2 \geq 0$.

Si $\int_a^b f^2 \neq 0$, alors le polynôme en λ du second degré de la relation (1)

$$\lambda \mapsto \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2$$

est de signe constant et positif. Par conséquent, il ne peut avoir qu'une racine au plus. Autrement dit, son discriminant est strictement positif. Et $\Delta \leq 0$ nous donne très précisément l'inégalité voulue.

En revanche, si $\int_a^b f^2 = 0$, alors la fonction affine

$$\lambda \mapsto 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2$$

est de signe constant. Ce qui n'est possible que si le coefficient directeur est nul et donc

$$\int_a^b fg = 0$$

ce qui nous donne encore l'inégalité voulue. □

4 Primitives et Intégrales

Attention, dans cette partie, on ne se place plus seulement sur un segment, mais sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Il peut donc être borné ou non, ouvert non, fermé ou non, semi ouvert ou semi fermé.

4.1 Primitives

4.1.1 Primitives d'une fonction

Définition 4.1 (Primitive) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $F' = f$.

⚠ Attention ! Les primitives sont donc définies à partir de la dérivation. On ne peut pas primitiver pour de vrai. On ne sait que dériver. Pour vérifier si une fonction est une primitive d'une autre, il faut la dériver. C'est la seule façon de faire. Il n'y a pas non plus de méthode de calcul pour une primitive. C'est les formules de dérivation que l'on regarde à l'envers. Mais ce qui se passe derrière, c'est de la dérivation. On ne peut que dériver. Et c'est avec ça que l'on fait tout.

Proposition 4.1 (Ensemble des primitives) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f admet une primitive F sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est formé de l'ensemble des fonctions $t \mapsto F(t) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration :
Soit $G(t) = F(t) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in I$. Alors G est est dérivable sur I puisque $D^1(I, \mathbb{R})$

est un $\mathbb{R}$-ev. Et la linéarité de la dérivation nous donne $G' = F' = f$. Donc G est bien une primitive de f sur I.

Inversement. Si G est une primitive sur I de f. Alors $F - G$ est dérivable sur I pour les mêmes raisons que précédement et $(F-G)' = F' - G' = 0$. Donc la fonction $F - G$ est constante sur I et donc $G = F + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. □

Proposition 4.2 ("Linéarité") :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si F et G sont des primitives de f et g respectivement, alors λF et $F + G$ sont des primitives de λf et $f + g$ respectivement.

Démonstration :
Clairement, λF et $F + G$ sont dérivable sur I et $(\lambda F)' = \lambda f$ et $(F+G)' = f + g$ par linééarité de la dérivation. □

Exemple 4.1 :
Donner les primitives des fonctions suivantes

$$x \mapsto \cos(3x)\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{(1+x)^2}{1+x^2} - \frac{\ln(x)x^x}{e^x}$$

4.1.2 Primitives des fonctions usuelles et composées

$f(t)$	$F(t)$	I	
t^n	$\frac{t^{n+1}}{n+1}+C$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{t^n}$	$\frac{-1}{(n-1)t^{n-1}}+C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
t^α	$\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{t}$	$\ln\|t\|+C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	
e^t	e^t+C	$\mathbb{R}$	
$\ln(t)$	$t\ln(t)-t+C$	$\mathbb{R}_+^*$	
$\sin(t)$	$-\cos(t)+C$	$\mathbb{R}$	
$\cos(t)$	$\sin(t)+C$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{sh}(t)$	$\mathrm{ch}(t)+C$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{ch}(t)$	$\mathrm{sh}(t)+C$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{1+t^2}$	$\arctan(t)+C$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{1-t^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+t}{1-t}\right\|+C$	$]-\infty,-1[,]-1,1[,]1,+\infty[$	
$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin(t)+C$	$]-1,1[$	$-\arccos(t)+C$

En vérifiant que les composées sont bien définies (et en écrivant ça correctement ...), on a aussi les composées :

$f \circ u$	$F \circ u$	
$u'u^\alpha$	$\frac{1}{1+\alpha}u^{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$\frac{u'}{u}$	$\ln \circ u$	
$u'e^u$	e^u	
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$	

4.2 Intégrales et Primitives

4.2.1 Théorème fondamental de l'intégration

Théorème 4.3 (Théorème fondamental de l'intégration [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.

Pour tout $a \in I$, l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I, et c'est l'unique application s'annulant en a et de dérivée f.

Autrement dit, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration :
Commençons par l'unicité. Soit donc F et G deux primitives de f sur I s'annulant en a. Alors elles diffèrent d'une constante. Mais la nullité simultanée des deux primitives en a impose que la constante soit nulle et donc, que $F = G$.

Passons à l'existence. Soit $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Par propriété de l'intégrale, on sait que $F(a) = 0$. Il faut donc maintenant montrer que cette fonction est dérivable sur I et que $F' = f$. Soit $x \in I$. Alors, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$, on a

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt$$

Supposons que x ne soit pas une extrémité de I. On va s'occuper d'abord de la limite à droite. Alors $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x + h \in I$, on a

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x et x n'est pas une extrémité de I, $\exists \eta > 0$ tel que $[x-\eta, x+\eta] \subset I$ et $\forall t \in [x-\eta, x+\eta]$, $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$. Alors $\forall h \in]0, \eta]$, $\forall t \in [x, x+h]$, $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$. Donc $\forall h \in]0, \eta]$,

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon dt = \varepsilon$$

Autrement dit, $\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$ et donc F est dérivable à droite en $x \in I$ qui n'est pas une extrémité de I et $F'(x^+) = f(x)$.

On peut faire exactement le même raisonnement à gauche. Il faut prendre garde aux quelques signes qui apparaissent du fait du mauvais ordre des bornes de l'intégrale. Mais on aboutit au même résultat : F est dérivable à gauche et $F'(x^-) = f(x)$.

Finalement, F est dérivable en tout point x de l'intérieur de l'intervalle et $F'(x) = f(x)$.

Le même raisonnement s'applique pour les extrémités en ne prenant que des h d'un seul signe suivant quel extrémité on considère. Et donc F est dérivable sur tout I. $\square$

Remarque :
Ce théorème est fondamental parce que c'est un théorème d'existence et d'unicité. Il donne l'existence de primitives pour une fonction continue et qu'en plus, elles sont uniques à une constante près et en plus, il fournit une expression de ces primitives. Bref, elles sont entièrement déterminées.

Exemple 4.2 :
Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \int_0^x tf(t)dt = 1$.

!!! ATTENTION !!!

Attention à l'ordre dans lequel se passe les choses ! L'application $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ a le bon goût d'être dérivable, d'une part, et le miracle fait en sorte qu'en plus, la dérivée de cette application a le bon goût d'être égale à f. La justification se fait dans cet ordre.

⚠

C'est une grave erreur conceptuelle que de dire que les intégrales sont des primitives. Cela sous-entend que les primitives ont une existence propre indépendante de la notion d'intégrale, et que ce sont les intégrales qui dépendent de la notion de primitive. Or c'est le contraire. Et de plus, cela mène à vouloir toujours remplacer des intégrales par des primitives. Ce qui est une très mauvaise idée dans la très large majorité des cas.

Le but de ce cours, et notamment de la construction de l'intégrale, est de prouver le contraire. Les intégrales sont des entités indépendantes qui ont une existence propre. Et c'est grâce à elles (et plus spécifiquement au théorème fondamental de l'intégration) que l'on peut donner un sens à la notion de primitives. Ce sont les primitives qui dépendent de la notion d'intégrale. C'est parce que les intégrales existent (et le théorème fondamental) que l'on sait que des primitives existent. Donc les primitives "sont" des intégrales (mais les intégrales ne sont pas des primitives).

Il est vraiment très important de remettre les choses dans le bon ordre et de bien comprendre comment les choses s'articulent. Sans quoi, il est impossible de se fabriquer une intuition correcte des objets en présence. Ce qui mène à de mauvaises idées et de mauvaises manipulation.

Corollaire 4.4 :
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Corollaire 4.5 (Expression de l'intégrale avec les primitives) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur I. Alors

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration :
On considère l'application $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. C'est donc la primitive de f qui s'annule en a. Alors $\int_a^b f = G(b)$. D'autre part, F et G diffère d'une constante C, *i.e.* $F = G + C$. En particulier, on a $F(a) = G(a) + C = C$ donc $F = G + F(a)$. Et donc $F(b) - F(a) = G(b) = \int_a^b f$. $\square$

Exemple 4.3 :
Calculer

$$\int_0^1 t^n dt, \qquad \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 dt$$

Exemple 4.4 :
Montrer que

$$\int_0^1 (-1)^n x^n dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exemple 4.5 :
Montrer que

$$\int_0^1 t^n e^{-t} dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ On ne saura que trop vous mettre en garde contre les dangers de faire des raccourcis de facilités visant à réduire les intégrales à de simple calculs de primitives.

D'abord parce que ce serait croire que le calcul de primitive peut être automatisé, qu'il y a des formules de calculs de primitives. Et ce n'est pas le cas.

Ensuite, parce que ce serait croire que les primitives sont définies de façon indépendante des intégrales. Or c'est exactement le contraire. Les intégrales viennent avant les primitives dans l'ordre d'apparition.

Et surtout, ce serait réduire les intégrale à du simple calcul, alors que ce sont des objets bien plus profonds que ça. Et la très grande majorité des intégrales que l'on étudie ne peuvent précisément pas être calculé avec des primitives. On ne connaît que très peu de primitives explicites de très peu de fonctions. C'est très rare. Et l'essentiel des fonctions qui interviennent dans les intégrales étudiées n'ont pas de primitives connues. C'est précisément ce qui les rends intéressantes. Ce n'est pas qu'une vulgaire différence de fonction en deux points. Et il est beaucoup plus facile de fabriquer une fonction sans primitive connue, que le contraire.

Remarque :
Remplacer une intégrale par des primitives fictives est surtout intéressant dans un cadre abstrait, théorique. C'est remplacer une intégrale, par une intégrale. Mais écrites différemment. Et c'est le changement formel qui peut être utile pour faire apparaître des jeux d'écriture (sommes télescopiques etc).

Remarque :
L'idée générale pour déterminer une primitive est le demerdieren-sie-sich. Concept assez peu amical, s'il en est. Il n'y a pas de processus de "primitivation". Ce n'est pas un mot qui existe. La dérivation, en revanche oui. La seule chose que l'on peut faire, c'est faire des paris pour trouver une primitive et modifier au fur et à mesure en fonction de ce qu'il se passe quand on dérive pour vérifier.

Il faut la dérivation/"primitivation" comme une sorte de fleuve. Ça ne coule que dans un sens. Dériver un objet, vous le mettez dans le fleuve et vous regardez où il atterrit. Pour trouver une primitive, on ne peut pas remonter le cours d'eau. Donc il faut remonter à pied, mettre un objet dans l'eau (dériver) et vérifier qu'il retombe là où il faut. Si ce n'est pas le cas, il faut se déplacer et recommencer.

Mais dans la majorité des cas, on ne peut pas savoir d'où la fonction vient. À cause es remous dans le fleuve. Dans les calculs, en dérivant, il y a des simplifications qui s'opèrent. Donc il y a des morceaux qui "disparaissent". Et il est impossible de faire réapparaître ce qui a disparu. Donc il est impossible de fabriquer une primitive par automatisation, d'avoir un processus. Et dans une bonne partie des cas, il n'y a pas du tout d'expression qui existent.

Exemple 4.6 :

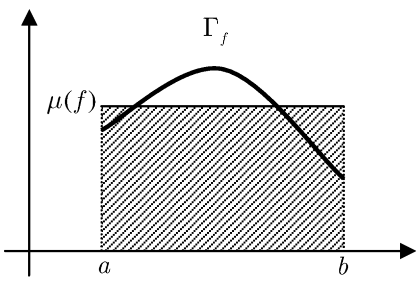
L'application $x \mapsto e^{-x^2}$ n'a pas de primitive connue explicite. Mais on peut montrer (problème intéressant) :

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.2.2 Valeur moyenne

Définition 4.2 (Valeur moyenne) :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On appelle valeur moyenne de f le réel

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$



La valeur moyenne permet de trouver la hauteur du rectangle de largeur le segment $[a, b]$ et dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe de f sur le segment $[a, b]$.

Exemple 4.7 :
Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto e^{x+1} - \frac{\ln(x)}{x}$ sur l'intervalle $[1, 3]$.

Théorème 4.6 (Théorème de la moyenne) :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = \mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Démonstration :
Ce théorème est en fait, un corollaire du TAF.

Comme f est continue sur $[a, b]$, elle admet une primitive F sur $[a, b]$. F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On peut donc appliquer le TAF à F : $\exists c \in]a, b[$ tel que $(b - a)F'(c) = F(b) - F(a)$. Puis en utilisant l'expression d'une intégrale à partir d'une primitive, on trouve le résultat annoncé.

Autre preuve : considérons la fonction g définie sur I par $g(t) = f(t) - \mu(f)$. Alors g est continue et

$$\int_a^b g = \int_a^b f - (b - a)\mu(f) = 0$$

donc la fonction g s'annule sur I, donc $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \mu(f)$. □

Corollaire 4.7 (Inégalité de la moyenne) :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et bornée par m et M (*i.e.* $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$).
Alors,

$$m \leq \mu(f) \leq M$$

On peut écrire ce résultat encore sous la forme

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$$

ou tout divisé par $(b - a)$. Tout ceci revenant exactement à la même chose.

Démonstration :
On peut démontrer ce résultat essentiellement de la même manière que pour le théorème de la moyenne, mais au lieu d'appliquer le TAF à une primitive de f, on applique l'IAF.

On alors, on peut le voir comme une application directe de la croissance de l'intégrale. Ce qui est plus simple. □

4.2.3 Intégrale fonction de ses bornes

Proposition 4.8 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $u, v : J \to I$ deux fonctions dérivables. On pose

$$g : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \end{array}$$

Alors g est dérivable.

Il ne faut pas retenir cette proposition en elle-même mais plutôt le plan de la démonstration qu'il faudra refaire.

Démonstration :
On intoduit F une primitive de f sur I. Alors $\forall x \in J$, $g(x) = F(v(x)) - F(u(x))$. Par composition et somme, g est dérivable sur J. Et $\forall x \in J$, $g'(x) = F'(v(x))v'(x) - u'(x)F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$. □

⚠ Attention ! Il ne faut pas oublier $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$ pour que les compositions fonctionnent bien.

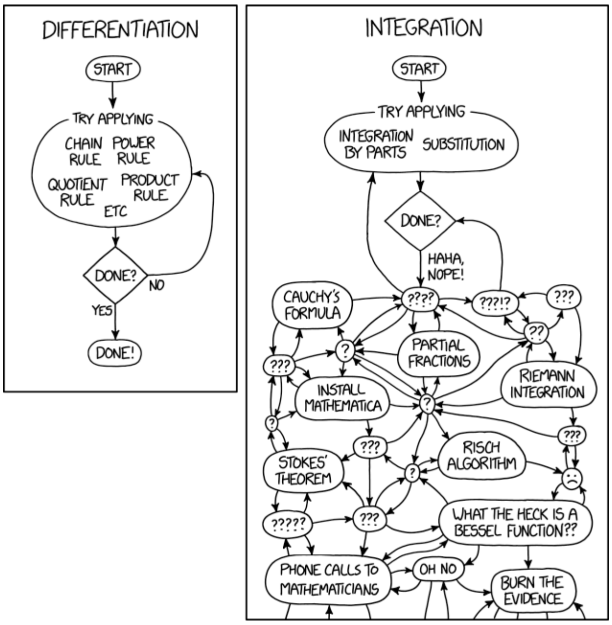
Exemple 4.8 :
Pour tout $x > 0$, on pose

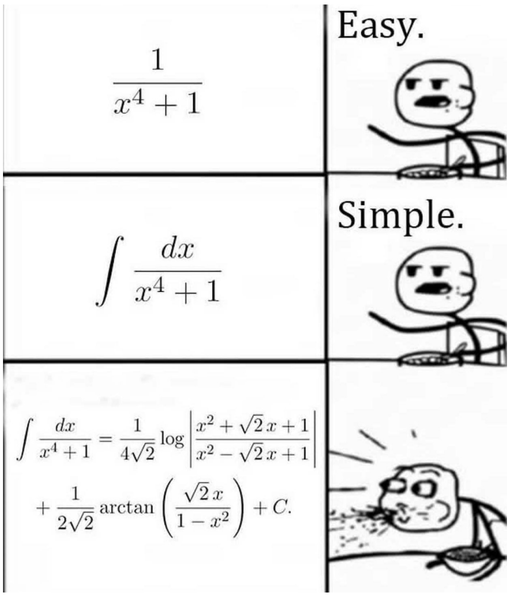
$$\varphi(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{t}{1+t+t^2+t^3} dt$$

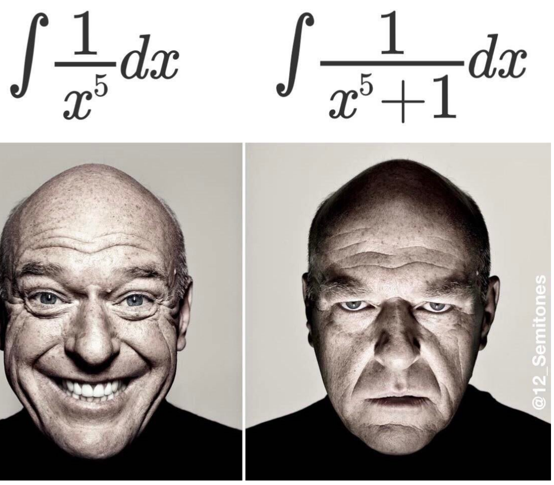
Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \arctan(x) - \pi/4$.

5 Techniques de calculs d'une intégrale

ATTENTION ! On rappelle que la "primitivation" n'existe pas ! On ne peut faire que dériver. Et trouver une primitive relève de l'acrobatie sans filet : il s'agit de réussir à défaire d'éventuelles simplifications pour faire apparaître une expression dont on peu extraire une primitive. Il est assez rare, en réalité, que l'on puisse calculer des intégrales.







5.1 Intégration par parties

Théorème 5.1 (Intégration Par Parties [✓]) :
Soit $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\forall a, b \in I$,

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Démonstration :
La fonction uv est une primitive de $u'v + uv'$. On en déduit $\int_a^b (u'v + uv') = [uv]_a^b$ puis, la linéarité

nous donne la formule voulue. □

Exemple 5.1 :
Calculer
$$\int_0^1 t\arctan(t)dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi/4}\left(\frac{x}{x\sin(x)+\cos(x)}\right)^2 dx.$$

Exemple 5.2 (Lemme de Lebesgue) :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$$

Remarque :
On peut extraire des principes généraux de la pratique de l'intégration par parties :

- Pour calculer $\int_a^b \widetilde{P}(t)e^{\alpha t}dt$ où $P \in \mathbb{R}[X]$, il suffit de faire des IPP successives, autant de fois que le degré de P de façons à réduire le degré du polynôme jusqu'à arriver à une intégrale d'une simple exponentielle.
- Pour calculer des intégrales de la forme $\int_a^b \widetilde{P}(t)\cos(\alpha t)dt$ ou $\int_a^b \widetilde{P}(t)\sin(\alpha t)dt$. On applique le même raisonnement que précédemment. Par IPP successives, on réduit le degré de P jusqu'à ce ramené à une intégrale d'un simple cosinus ou sinus.
- On peut aussi utiliser des IPP pour faire apparaître des relations de récurrences.

Exemple 5.3 :
Calculer
$$I = \int_0^1 (t^2+2t+1)e^{-3t}dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\pi/2}\sin(t)^n dt$$

Exemple 5.4 :
Montrer que

$$\int_0^1 t\sin(xt)dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

mais que

$$\int_0^1 t\sin(xt)dx$$

n'a pas de limite quand $t \to +\infty$.

5.2 Changement de variables

5.2.1 Principe

Théorème 5.2 :
soit $u : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : J \to \mathbb{R}$ continue.
Alors, $\forall a, b \in I$,

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$$

Démonstration :
Soit F une primitive de f sur J. Alors la fonction $F \circ u$ est une primitive de $u'f \circ u$ et par suite

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = [F(u(t))]_a^b = [F(x)]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$$

□

Remarque :
Pour exploiter cette formule, on écrit formellement

Pour $t \in [c, d]$, on pose $x = u(t)$ avec $u : [c, d] \to [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ (bijective). Donc $dx = u'(t)dt$.

Pour $t = c$, on a $x = u(c)$ et pour $t = d$, on a $x = u(d)$. Et donc

$$\int_c^d f(u(t))u'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

Remarque :
Il serait tentant de rajouter dans l'énoncé une notion de bijectivité de u pour éviter de "repasser" plusieurs fois par le même morceaux de chemin. Avec ces intégrales d'une seule variable, ça n'a pas grandes importances. Mais avec des intégrales de fonctions de plusieurs variables, la bijectivité du changement de variable devient alors indispensable.

Il est donc bon de regarder en plus la bijectivité du changement de variable. Cela permet de s'y habituer dès maintenant (et puis ça ne fait pas de mal).

Remarque :
On appelle changement de variable affine tout changement de variable de la forme $u(t) = \alpha t + \beta$.

Méthode pour un changement de variables :

- Si on a une intégrale du type $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, on peut appliquer le théorème directement.
- Si on a une intégrale du type $\int_a^b f(t)dt$, on veut effectuer le changement de variable $t = \varphi(x)$. Seulement, ce n'est pas bon "sens". On effectue en réalité le changement de variable $x = \varphi^{-1}(t)$. Mais on exprime φ en partant de l'expression que l'on a. Les choses se font un peu "à l'envers". Il faudra donc s'assurer de la bijectivité de φ et du faire que φ^{-1} est $\mathcal{C}^1$. Et on refait le changement de variable sur l'expression que l'on souhaite obtenir.

Exemple 5.5 :
Calculer les deux intégrales :

$$I_1 = \int_1^e \frac{dt}{t + t\ln t} \qquad I_2 = \int_{\ln(5)}^{\ln(13)} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x - 1}}dx.$$

Exemple 5.6 :
Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx.$$

5.2.2 Cas d'applications de changements de variables

La règle essentielle pour les changements de variables est essentiellement d'avoir une bonne intuition. Un peu comme pour trouver une solutions particulière d'une équation différentielle linéaire. C'est la pratique et l'entraînement qui permet d'avoir des idées de ce qu'il peut être (mais n'est pas forcément le cas) judicieux de faire.

Il y a toutefois quelques "astuces" que l'on peut noter (mais qui ne sont pas automatiquement les meilleures idées à avoir) :

- **Avec des fractions rationnelles.**
  Si un changement de variable très simples (affine par exemple) ne suffit pas ou une astuce $+1-1$ ne suffit pas à simplifier l'expression, on peut faire :
  - On commence par faire une décomposition en éléments simples
  - Pour les termes de la forme $\int_a^b \frac{1}{(t-c)^n}dt$, il n'y a pas de problèmes.
  - Pour les termes de la forme $\int_a^b \frac{\alpha x+\beta}{px^2+qx+r}dx$:
    - On exprime le numérateur à l'aide de la dérivée du dénominateur pour faire "disparaître" la variable au numérateur, puis on intègre à l'aide d'un $\ln$.
    - Pour la partie restante, on écrit le dénominateur sous forme canonique $p(x-\gamma)^2+\delta$, puis on se ramène à une $\arctan$.

  Exemple 5.7 :
  Calculer $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x^4-2x^3-2x^2+8}dx$.

- **Avec des fonctions trigonométriques : Règles de Bioche**
  - Avec un polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$: le plus simple est de linéariser l'expression et éventuellement utiliser la relation $\cos(x)^2+\sin(x)^2=1$ s'il y a des puissances impaires.
  - Avec une fraction rationnelle en $\cos(x)$ et $\sin(x)$: on applique les règles de Bioche :
    - Si $f(x)dx$ est invariant par $x\mapsto -x$, on effectue le changement de variables $t=\cos(x)$
    - Si $f(x)dx$ est invariant par $x\mapsto \pi-x$, on effectue le changement de variable $t=\sin(x)$
    - Si $f(x)dx$ est invariant par $x\mapsto \pi+x$, on effectue le changement de variable $t=\tan(x)$
    - Sinon, on fait $t=\tan(x/2)$
  - On se ramène ensuite au cas des fractions rationnelles

  Exemple 5.8 :
  Calculer $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(x)^3+\cos(x)\sin(x)^2-\sin(x))dx$ et $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(x)^2}{\cos(x)^3+2\sin(x)^2-2}dx$.

- **Avec des fonctions à radicaux :**
  - Si on a une fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, on pose $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
  - Si on a une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (avec $a\neq 0$) : On met l'expression sous le radical sous forme canonique $\sqrt{\pm(\alpha x+\beta)^2\pm 1}$ et on pose $t=\alpha x+\beta$ puis :

- Si on a du $\sqrt{t^2+1}$, on pose $t = \mathrm{sh}(u)$ ou $t = \tan(u)$ en prenant garde à l'intervalle d'intégration (car $\mathrm{sh}^2 + 1 = \mathrm{ch}^2$ et $1 + \frac{1}{\tan^2} = \frac{1}{\cos^2}$)
- Si on a du $\sqrt{t^2-1}$, on pose $t = \pm\,\mathrm{ch}(u)$ suivant le signe de t (car $\mathrm{ch}^2 - 1 = \mathrm{sh}^2$)
- Si on a du $\sqrt{1-t^2}$, on pose $t = \sin(u)$ ou $t = \cos(u)$ (car $1 - \cos^2 = \sin^2$ et $1 - \sin^2 = \cos^2$)

Exemple 5.9 :

Calculer $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\frac{2x+3}{2x+1}}+1}{x+1}dx$.

5.2.3 Propriété géométrique

Proposition 5.3 (Translation) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $\tau \in \mathbb{R}$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b f(t+\tau)dt = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f(t)dt$$

Démonstration :
On utilise le changement de variable affine $x = t + \tau$. Alors $dx = dt$. Donc pour $t = a$, $x = a + \tau$ et pour $t = b$, $x = b + \tau$. Alors

$$\int_a^b f(t+\tau)dt = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f(x)dx$$

□

Proposition 5.4 (Parité) :
Soit $a > 0$ e t $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ continue. Alors

- Si f est paire alors
$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$$
- Si f est impaire, alors
$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0$$

Démonstration :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$$

On effectue le changement de variable dans la première intégrale $x = -t$. Alors $dx = -dt$ et pour $t = -a$, $x = a$ et pour $t = 0$, $x = 0$. Donc

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-x)(-dx) = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

Ce qui donne le résultat selon si f est paire ou impaire. □

Proposition 5.5 (Périodicité) :
Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue T-périodique. Alors $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$$

Démonstration :
On a

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{a+T} f(t)dt &= \int_{a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt + \int_{T}^{a+T} f(t)dt && \text{par Chasles} \\
&= \int_{a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x+T)dx && \text{chgt var } x = t - T \\
&= \int_{0}^{T} f(t)dt
\end{aligned}$$

□

Exemple 5.10 :
Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(t/2)dt = 0$$

6 Approximation des intégrales

On a vu des techniques de calculs d'une intégrales. Mais ces techniques ne suffisent pas toujours. On ne peut pas toujours calculé une intégrale. Le problème étant qu'on ne peut pas toujours avoir de primitive pour une fonction. Par exemple, on ne peut pas calculer l'intégrale $\int_0^1 te^t dt$, bien que cette intégrale existe et soit parfaitement définie.

Il faut alors se contenter d'approximations de l'intégrale. Plusieurs façons d'approcher une intégrale sont possibles. Nous allons en voir une indispensable, les sommes de Riemann, que nous allons généraliser un petit peu (méthode des trapèzes et de Simpson entre autres). Mais ce ne sont pas les seules approximations possibles. Il en existe d'autres, bien sûr. On se contentera de celles là.

6.1 Sommes de Riemann

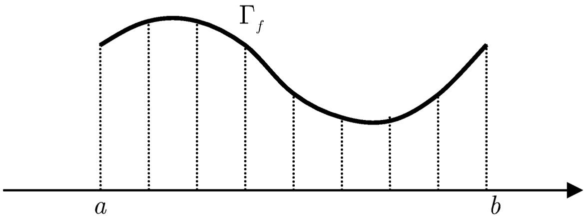
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère la subdivision $\sigma_n = (a_0, \dots, a_n)$ à pas constant, donc déterminée par

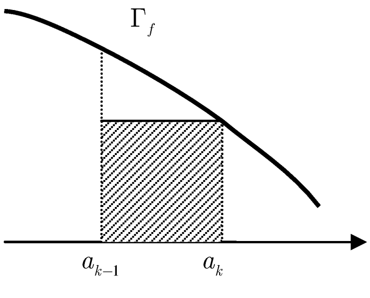
$$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ a_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Par la relation de Chasles, on a donc

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f$$



On approche alors les intégrales $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f$ par l'aire du rectangle définit par la valeur de droite de f.



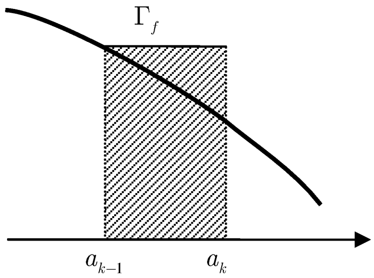
On approche donc $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f$ par

$$(a_k - a_{k-1})f(a_k) = \frac{b-a}{n}f(a_k)$$

Puis par sommation, on arrive donc à une approximation de $\int_a^b f$ par

$$R_n^+ = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

On peut bien sûr faire la même construction en approchant les $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f$ par les rectangles à gauche

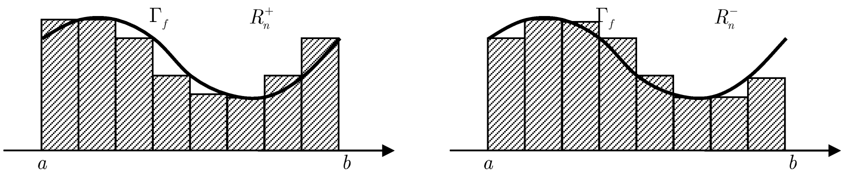


On approche donc $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f$ par

$$(a_{k-1}-a_k)f(a_{k-1}) = \frac{b-a}{n} f(a_{k-1})$$

et par sommation, on a donc une approximation de $\int_a^b f$ par

$$R_n^- = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$



Définition 6.1 :
Les quantités R_n^+ et R_n^- sont appelés respectivement sommes de Riemann de la fonction f associés à la méthode des rectangles à droite et à gauche.

Théorème 6.1 (Approximation par les sommes de Riemann) :
Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de continue par morceaux. Alors les suites des sommes de Riemann $(R_n^+)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(R_n^-)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes de limite $\int_a^b f$. Autrement dit

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$$

Démonstration :
On va faire la démonstration dans le cas d'une application de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui simplifie grandement l'étape de majoration dans les intégrales. Et c'est le cas le plus courant de majoration des intégrales, ce qui est donc plus cohérent vis à vis de ce qui est demandé réellement. Toutefois, le théorème reste vrai avec une fonction continue, mais au prix de plus d'effort pour les majorations.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par construction de la méthode des rectangles et la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f - R_n^+\right| &= \left|\sum_{k=1}^n \left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} f - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right)\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} (f(t) - f(a_k))dt\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(t) - f(a_k)|dt\end{aligned}$$

On pose $M = \sup_{[a,b]} |f'|$. Alors par inégalité des accroissements finis, pour tout $t \in [a_{k-1}, a_k]$,

$$|f(t) - f(a_k)| \leq M(a_k - t) \leq M\frac{b-a}{n}$$

et donc

$$\left|\int_a^b f(t)dt - R_n^+\right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{M(b-a)}{n}dt = \sum_{k=1}^n \frac{M(b-a)^2}{n^2} = \frac{(b-a)^2}{n}M$$

L'étude est identique pour R_n^-. □

Remarque :
On vient donc de démontrer une majoration assez forte :

$$\left|\int_a^b f - R_n^+\right| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \sup_{[a,b]} |f'|$$

Cette majoration nous permet aussi de mesurer l'écart entre la limite et la somme de Riemann. L'écart entre les deux est un $O(1/n)$. La suite des sommes de Riemann converge donc vers l'intégrale de façon au moins aussi vite que la suite $(1/n)$, ce qui n'est pas très rapide.

Ce genre de raisonnement de majoration et ce genre de majoration est classique avec des intégrales. Il faut retenir le principe générale utilisé dans cette démo. Il est réutilisable un peu partout quand il faut majorer des intégrales.

Corollaire 6.2 (Sommes de Riemann sur $[0,1]$ [✓]) :
Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$$

Démonstration :
Il suffit d'appliquer les sommes de Riemann. □

Remarque :
On sent ici venir les séries arriver à grand pas. On aura d'ailleurs besoin de l'intégration dans les séries. Un des outils fondamentales sur les séries est la comparaison série/intégrale.

Exemple 6.1 :
Donner un équivalent simple de

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Exemple 6.2 :
Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

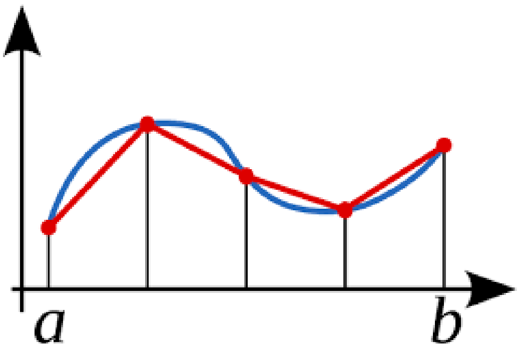
Il y a un lien évident avec l'informatique. En fait, les sommes des Riemann correspondent à la méthode des rectangles de calcul numérique d'une intégrale. On peut don écrire un algorithme qui va permettre de calculer une intégrale par cette méthode (cette fonction permet aussi de voir l'erreur entre la valeur approchée et la valeur théorique) :

```python
def Riemann(f,a,b,n):
    X=np.linspace(a,b,n)
    F=(b-a)/n*f(X)
    R=sum(F)
    I=inte.quad(f,a,b)[0]
    return(R,I,R-I)
```

Mais cette méthode n'est pas la meilleure.

6.2 Méthode des trapèzes et de Simpson

Il est possible aussi d'approcher la fonction par des trapèzes plutôt que par des rectangles. L'approximation est un peu meilleure pour une complexité similaire. C'est ce qu'on appelle ma méthode des trapèzes. On approche la fonction par des droites affines.



Les droites affines d'approximation sont alors les $y = \frac{f(a_{k+1})-f(a_k)}{a_{k+1}-a_k}x + \frac{a_{k+1}f(a_k)-a_kf(a_{k+1})}{a_{k+1}-a_k}$. Et l'approximation s'écrit alors

$$T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$$

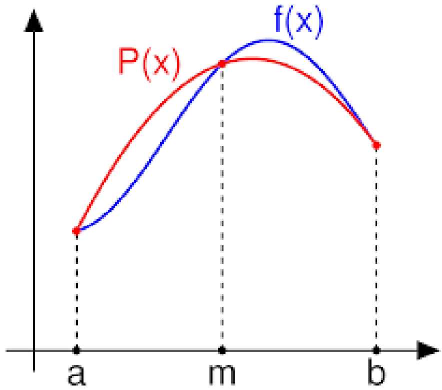
Bien sûr, il est possible de faire un code en python qui permet de calculer l'intégrale avec cette méthode. La fonction qui suit permet même de comparer les deux méthodes.

```python
def Affine(f,a,b,n):
    X=np.linspace(a,b,n+1)
    T1=f(np.linspace(a,X[-2],n))
    T2=f(np.linspace(X[1],b,n))
    T=(b-a)/(2*n)*(T1+T2)
    A=sum(T)
    R=Riemann(f,a,b,n)[0]
    I=inte.quad(f,a,b)[0]
    return(A,A-R,A-I)
```

Cette fonction compare aussi la valeur approchée trouvée avec la méthode des trapèzes avec la valeur théorique.

On peut alors aussi faire le même genre de majoration que pour les sommes de Riemann pour montrer que la suite (T_n) converge bien vers l'intégrale et la majoration qu'on obtient est alors en $O(1/n^2)$. Cette suite converge donc beaucoup plus vite.

On peut même faire encore un peu mieux en approximant la fonction par des paraboles. C'est la méthode de Simpson. Évidemment, on va coller à chaque fois un peu plus à la fonction sur chacun des intervalles de la subdivision, ce qui fait que l'approximation sera encore meilleure.



Il est possible de généraliser cette méthode et d'approximer la fonction par des polynômes de degré toujours plus grand. L'approximation n'en est que meilleur, mais ça complique un peu les calculs, évidemment. Et la meilleur façon de pouvoir approximer la fonction par des polynômes est d'utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.

7 Formules de Taylor

Les intégrales sont utiles aussi pour beaucoup d'autres choses. Elles permettent par exemple de combler certains vides laissés par les autres pans de l'analyse. Par exemple, c'est grâce aux intégrale que l'on va pouvoir (enfin) démontrer la formule de Taylor-Young. Elle ne sera qu'un corollaire de la formule de Taylor avec reste intégral.

7.1 Formule de Taylor avec reste intégrale

Théorème 7.1 (Taylor avec reste intégral [✓]) :
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Alors

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Démonstration :
On fait une récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

puisque f est une primitive de f' sur I.

Supposons la propriété vraie pour un certain $n \geq 0$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $n+2$. Elle est donc en particulier de classe $n+1$ et donc par hypothèse de récurrence,

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

La fonction $f^{(n+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc on peut faire une IPP :

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt$$

et ainsi

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt$$

puis

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt$$

□

Remarque :
A contrario de la formule de Taylor-Young, la formule de Taylor avec reste intégrale est une vraiment une égalité. Ce n'est pas une relation valable seulement au voisinage d'un point (ce n'est pas une relation asymptotique). Cette formule est valable POUR TOUT x dans l'intervalle. Cette formule est beaucoup plus forte que Taylor-Young. Forcément puisque Taylor-Young est un corollaire facile de Taylor avec reste intégral.

Exemple 7.1 :
Montrer l'inégalité, $\forall x \in [0, \pi/2]$,

$$x - x^3/6 \leq \sin(x) \leq x - x^3/6 + x^5/120$$

Exemple 7.2 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad f''(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Montrer que

$$f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

7.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 7.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange [✓]) :
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ telle que $f^{(n+1)}$ est bornée et $a \in I$.
Pour tout $x \in I$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

avec $M = \sup_I |f^{(n+1)}|$

Démonstration :
On sépare en deux cas : $x \geq a$ et $x \leq a$. Si $x \geq a$, on reprend la formule de Taylor avec reste intégral qui nous donne

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \int_a^x \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{n!}|x-t|^n dt \leq \frac{\sup_I |f^{(n+1)}|}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt$$

Dans le second cas, il faut tenir compte du signe qui apparaît à cause des bornes de l'intégrale qui ne sont pas dans le bon sens, ce qui nous donne :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{\sup_I |f^{(n+1)}|}{n!} \int_x^a (t-x)^n dt$$

□

Remarque :
Si I est un segment, $f^{(n+1)}$ est automatiquement bornée puisqu'elle est continue.

Exemple 7.3 :
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

Exemple 7.4 :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. En considérant, $|S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{f'(0)k}{n^2}|$, montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f'(0)}{2}.$$

7.3 Applications

Théorème 7.3 (Taylor-Young) :
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$. Alors

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration :
On va se placer dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Si elle ne l'est pas, le théorème reste vrai mais plus pénible à démontrer. Il suffit alors de reprendre Taylor avec reste intégral et montrer que

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$$

On se place dans le cas où a n'est pas une borne de I. Si c'était le cas, il faudrait tronquer les intervalles dans la suite. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset I$. Alors $|f^{(n+1)}|$ est continue sur $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et est donc bornée par M. Donc

$$\left|\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt\right| \leq \frac{M}{n!}\left|\int_a^x |x-t|^n dt\right| = \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \underset{x\to a}{=} o(|x-a|^n)$$

ce qui achève la démonstration. □

Il nous manquait la démo dans le chapitre sur les DL. La voila.

Exemple 7.5 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

8 Extension aux fonctions complexes

8.1 Construction de l'intégrale d'une fonction complexe

Définition 8.1 (Intégrale d'une fonction complexe) :
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$ continue (on rappelle que cela veut dire que $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont deux fonctions réelles continues sur I). Soit $a, b \in I$.

On appelle intégrale de f de a à b le complexe

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathfrak{Re}(f)(t)dt + i\int_a^b \mathfrak{Im}(f)(t)dt$$

C'est la définition qu'on attendait qui est cohérente avec les autres extensions au cas complexe.

Exemple 8.1 :
Calculer

$$\int_0^{2\pi} e^{it}dt = \int_0^{2\pi} \cos(t)dt + i\int_0^{2\pi} \sin(t)dt = 0$$

et

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+i}$$

Théorème 8.1 (Propriété de l'intégrale) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

(i) L'application $f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.

(ii) Et pour la conjugaison : $\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$

$$\overline{\int_a^b f} = \int_a^b \overline{f}$$

Démonstration :
Facile □

Théorème 8.2 (Relation de Chasles) :
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$ continue et $a, b, c \in I$. Alors

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

Démonstration :
On le fait sur les parties réelles et imaginaires qui sont réelles. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ On rappelle qu'on est dans $\mathbb{C}$. Donc il n'y a plus de notion de positivité ou de croissance. Donc les relations que l'on avait précédemment en lien avec le signe de f etc n'ont plus lieu d'être ici. Par exemple, l'intégrale de la fonction $t \mapsto e^{it}$ est nulle sur $[0, 2\pi]$ alors que la fonction ne l'est pas.

Théorème 8.3 (Inégalité triangulaire intégrale) :
Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{C}$ continue et $a, b \in I$, $a < b$. Alors

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Attention ! Ici, il ne se passe pas la même chose que dans les réels. D'abord, la première fonction est une fonction à variable complexe alors que la second est une fonction réelle positive.

Démonstration :
On pose $J = \int_a^b f$. Alors on peut écrire $J = re^{i\theta}$ avec $r = \left|\int_a^b f\right|$. On considère alors la fonction g définie sur I par $g(t) = f(t)e^{-i\theta}$. C'est une fonction continue sur I et

$$\int_a^b g(t)dt = e^{-i\theta} \int_a^b f(t)dt = Je^{-i\theta} = r \in \mathbb{R}_+^*$$

donc

$$r = \left|\mathfrak{Re}\left(\int_a^b g(t)dt\right)\right|$$

Or

$$\left|\mathfrak{Re}\left(\int_a^b g(t)dt\right)\right| = \left|\int_a^b \mathfrak{Re}(g)(t)dt\right| \leq \int_a^b |\mathfrak{Re}(g)(t)|dt \leq \int_a^b |g(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt$$

donc

$$r = \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

□

8.2 Intégration et dérivation

Définition 8.2 (Primitive) :
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie sur I dérivable et telle que $F' = f$.

Si f possède une primitive, elle en possède une infinité et elles diffèrent toutes d'une constante additive (complexe)

Proposition 8.4 (Caractérisation des primitives complexes) :
Soit I un intervalle et $F, f : I \to \mathbb{C}$. On a équivalence entre

(i) F est primitive de f sur I

(ii) $\mathfrak{Re}(F)$ et $\mathfrak{Im}(F)$ sont primitives de $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ respectivement.

Démonstration :
Reprendre la définition de la dérivation pour les fonctions complexes. □

Exemple 8.2 :
Déterminer une primitive de $x \mapsto 3^x \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 8.5 (Existence de primitive) :
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Alors $\forall x \in I$, f possède une unique primitive s'annulant en a et c'est la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

Démonstration :
Il suffit de reprendre la proposition précédente avec la définition des intégrales pour les fonctions complexes. □

Proposition 8.6 (Calcul de l'intégrale à partir des primitives) :
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Si F est une primitive de f sur I, alors $\forall a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration :
Comme d'hab', on repasse par la définition des intégrales des fonctions complexes et on se ramène ainsi au cas réel. □

Exemple 8.3 :
Calculer $\int_0^{2\pi} e^{at}\cos(t)dt$ et $\int_0^{2\pi} e^{at}\sin(t)dt$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 8.7 (Changement de variable) :
Soit I, J deux intervalles, $u : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Alors $\forall a, b \in J$,

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$$

Démonstration :
Il suffit de reprendre la démo dans le cas réel. Ça ne change pas grand chose. □

Théorème 8.8 (IPP) :
Soit $f, g : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Démonstration :
On utilise la dérivation des fonctions complexes et le fait que fg est unue primitive de $f'g + fg'$. □

Exemple 8.4 :
Calculer

$$\int_0^\pi te^{it}dt$$

Théorème 8.9 (Taylor avec reste intégral pour les fonctions complexes) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a \in I$.
alors $\forall x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

La preuve est très similaire.

On pourrait également définir les intégrales de Riemann pour les fonctions complexes avec les mêmes convergences.