Formulaire MPSI

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

2 mai 2025

> Une condition nécessaire à la réussite de l'oral reste donc de [...] connaître par cœur ses formules de développements limités, de trigonométrie, de développements en série entière usuels... [CCINP 2022]

Table des matières

1 Dénombrement

1.1 Coefficients binomiaux

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j) \in \mathbb{N}$$

Formule de Pascal : $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Symétrie : $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

1.2 Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$$

2 Complexe

2.1 Module

$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \overline{z} = a - ib, \qquad z\overline{z} = |z|^2$$

Inégalité triangulaire et inégalité triangulaire renversée :

$$||z| - |z'|| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$$

2.2 Argument

pour $z \neq 0$,

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \qquad \begin{cases} \rho = |z| > 0 \\ \arg(z) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

2.3 Caractérisation de réels et imaginaires purs

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \iff z = \mathfrak{Re}(z) \iff \mathfrak{Im}(z) = 0$$
$$z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z} \iff z = \mathfrak{Im}(z) \iff \mathfrak{Re}(z) = 0$$

2.4 Complexe de module 1

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\} \qquad \text{et} \qquad z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}$$

et

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \qquad e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Arc moitié :

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2} \qquad 1 - e^{i\theta} = 2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}$$

2.5 Complexe et trigonométrie

Formule de Moivre : $$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Formules d'Euler : $$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2.6 Racine n-ème

$$z^n = 1 \iff \exists k \in \{0, \ldots, n-1\},\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$z^n = \rho e^{i\theta} \iff \exists k \in \{0, \ldots, n-1\},\ z = \sqrt[n]{\rho}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$$

2.7 Amplitude et phase

$$\forall a, b, t \in \mathbb{R},\ \exists A, \varphi \in \mathbb{R},\ a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi)$$

2.8 Racine carrée dans $\mathbb{C}$

$$\delta^2 = z \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(\delta)^2 + \mathfrak{Im}(\delta)^2 = |z| \\ \mathfrak{Re}(\delta)^2 - \mathfrak{Im}(\delta)^2 = \mathfrak{Re}(z) \\ 2\,\mathfrak{Re}(\delta)\,\mathfrak{Im}(\delta) = \mathfrak{Im}(\delta) \end{cases}$$

2.9 Exponentielle complexe

$$e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)}e^{i\,\mathfrak{Im}(z)}$$

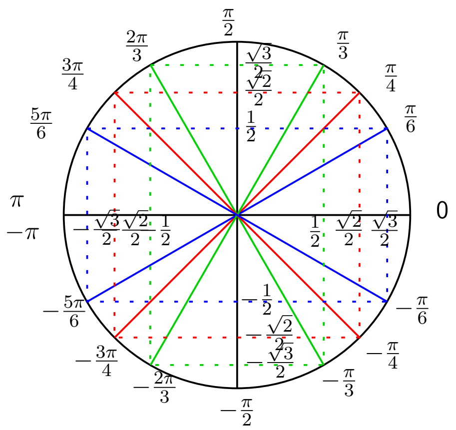
3 Trigonométrie

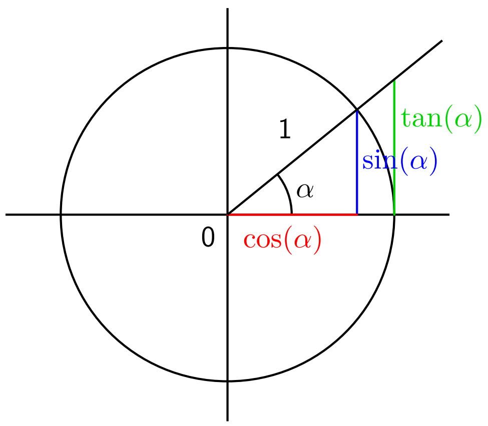
3.1 Fonctions circulaires

3.1.1 Premières propriétés

	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Période	2π	2π	π
Parité	Impaire	Paire	Impaire
$f(\pi - x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$-\tan(x)$
$f(\pi + x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\tan(x)$
$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\frac{1}{\tan(x)}$
$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\frac{1}{\tan(x)}$
Ensemble de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
f'	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$

3.1.2 Valeurs remarquables





	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Indéfini

3.2 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

3.2.1 Définition

Les périodicités et les symétries des fonctions trigonométriques circulaires introduisent des difficultés pour résoudre des équations du type $\sin(x) = \lambda$. Par exemple, $\pi/6$, $5\pi/6$ et $\pi/6 + 4\pi$ ont tous la même image par la fonction sinus. Les fonctions circulaires réciproques $\arcsin$, $\arccos$ et $\arctan$ ne sont pas de "vraies" réciproques puisque les fonctions de départs ne sont pas des bijections. Ajoutons qu'elles ne sont *pas* périodiques. Il faut les combiner avec les priodicité et les symétries éventuelles pour résoudre les équations.

- Si $\sin(x) = \lambda \in [-1, 1]$, alors $\begin{cases} x = \arcsin(\lambda) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin(\lambda) + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\cos(x) = \lambda \in [-1, 1]$, alors $\begin{cases} x = \arccos(\lambda) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\arccos(\lambda) + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\tan(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \arctan(\lambda) + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le problème contraire ne pose aucune difficulté : si $x = \arcsin(\lambda)$, alors $\sin(x) = \lambda$.

3.2.2 Propriétés

	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$
Ensemble de définition	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
Ensemble image	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[0, \pi]$	$]-\pi/2, \pi/2[$
Période	Aucune	Aucune	Aucune
Parité	Impaire	Aucune	Impaire
Ensemble de dérivabilité	$]-1, 1[$	$]-1, 1[$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

3.2.3 Relations

	$\arccos(x)$	$\arcsin(x)$	$\arctan(x)$
$\cos$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\tan$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	x

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \arctan(x) + \arctan(1/x) = \text{sign}(x)\frac{\pi}{2}$$

3.3 Formules

3.3.1 Corollaire du Théorème de Pythagore

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{1+\tan(x)^2} \qquad \sin(x)^2 = \frac{\tan(x)^2}{1+\tan(x)^2}$$

3.3.2 Formules de duplication

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \qquad \sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$$

3.3.3 Produits

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\Big) \qquad \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big) \qquad \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) - \sin(a-b)\Big)$$

3.3.4 Arc double, Arc moitié

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \\ &= 2\cos(x)^2 - 1 \\ &= 1 - 2\sin(x)^2\end{aligned} \qquad \cos(x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \sin(x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2} \qquad \tan(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

On a également, en symétrie avec les règles de Bioche :

$$\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan(x)^2} \qquad \cos(2x) = \frac{1-\tan(x)^2}{1+\tan(x)^2}$$

3.3.5 Formules de Moivre

$$(\cos(a) + i\sin(a))^n = \cos(na) + i\sin(na)$$

d'où l'on déduit par exemple, en prenant la partie imaginaire ou la partie réelle

$$\begin{aligned}
\cos(3a) &= \cos(a)^3 - 3\cos(a)\sin(a)^2 \\
&= 4\cos(a)^3 - 3\cos(a) \\
\sin(3a) &= 3\cos(a)^2\sin(a) - \sin(a)^3 \\
&= 3\sin(a) - 4\sin(a)^3 \\
\tan(3a) &= \frac{3\tan(a) - \tan(a)^3}{1 - 3\tan(a)^3}
\end{aligned}$$

3.3.6 Arcs en progression arithmétique

(à redémontrer à chaque utilisation)

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(nx/2)\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(x/2)} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\cos(nx/2)\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(x/2)}$$

3.4 Trigonométrie Hyperbolique

$$\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) \qquad \mathrm{ch}(p) + \mathrm{ch}(q) = 2\,\mathrm{ch}(\frac{p+q}{2})\,\mathrm{ch}(\frac{p-q}{2})$$

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a) \qquad \mathrm{ch}(p) + \mathrm{sh}(q) = 2\,\mathrm{sh}(\frac{p+q}{2})\,\mathrm{ch}(\frac{p-q}{2})$$

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)} \qquad \mathrm{th}(p) + \mathrm{th}(q) = \frac{\mathrm{sh}(p+q)}{\mathrm{ch}(p)\,\mathrm{ch}(q)}$$

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \qquad \operatorname{ch}(p) - \operatorname{ch}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})$$

$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a) \qquad \operatorname{sh}(p) - \operatorname{sh}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})$$

$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th}(a) - \operatorname{th}(b)}{1 - \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)} \qquad \operatorname{th}(p) - \operatorname{th}(q) = \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch}(p)\operatorname{ch}(q)}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(2x) &= \operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2 \\ &= 2\operatorname{ch}(x)^2 - 1 \\ &= 1 + 2\operatorname{sh}(x)^2\end{aligned} \qquad \operatorname{ch}(x)^2 = \frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) \qquad \operatorname{sh}(x)^2 = \frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{2}$$

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}(x)}{1+\operatorname{th}(x)^2} \qquad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)+1} = \frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{\operatorname{sh}(2x)}$$

4 Développements limités usuels en 0

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + +o(x^{2n+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) x^k\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \prod_{j=0}^{k-1} (2j-1) x^k \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2k(2^{k-1}(k-1)!)^2} x^k\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n n!} x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \prod_{j=0}^{k-1} (2j+1) x^k \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2^k k!)^2} x^k\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arctan(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

5 Dérivées

5.1 Dérivées usuelles

Fonction		Dérivée	Domaine de dérivabilité
x^n	$n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z}_-^* \rightsquigarrow \mathbb{R}^*$
x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$ (dépend de α)
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
a^x	$a > 0$	$\ln(a)a^x$	$\mathbb{R}$
$\ln\lvert x\rvert$		$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$	$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(x)$		$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$		$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$		$1+\tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{ch}(x)$		$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$		$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$		$1-\mathrm{th}(x)^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin(x)$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arccos(x)$		$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arctan(x)$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

5.2 Dérivées n-ème usuelles

Fonction	Dérivée n-ème
e^x	e^x
$\mathrm{ch}(x)$	$\begin{cases} \mathrm{ch}(x) & \text{si } n \equiv 0[2] \\ \mathrm{sh}(x) & \text{sinon} \end{cases}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\begin{cases} \mathrm{sh}(x) & \text{si } n \equiv 0[2] \\ \mathrm{ch}(x) & \text{sinon} \end{cases}$
$\cos(x)$	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin(x)$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\right) x^{\alpha-n}$
x^p	$\begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$
$\ln(x)$	$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

6 Primitives usuelles

6.1 Polynômes et Fractions rationnelles

Fonction		Primitive	Intervalles
$(x-x_0)^n$	$x_0 \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{R}$ $n \leq -2 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$
$(x-x_0)^\alpha$	$x_0 \in \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$	$\frac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]x_0, +\infty[$
$(x-z_0)^n$	$z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{(x-z_0)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x-a}$	$a \in \mathbb{R}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$]-\infty, a[, \ ]a, +\infty[$

6.2 Fonctions usuelles

Fonction		Primitive	Intervalles
$\ln(x)$		$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$		$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$		$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$		$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{sh}(x)$		$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$		$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$		$\ln(\mathrm{ch}(x))$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arcsin(x)$	$]-1, 1[$
$\frac{1}{1-x^2}$		$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$]-\infty, -1[,\ ]-1, 1[,\ ]1, +\infty[$