



Interrogation 25

Déterminant

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Formule de Sarrus.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k,\sigma(k)}$$

2. Développement selon une ligne ou une colonne (un seul cas).

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. Le développement de $\det(A)$ selon la j -ème colonne est :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} A_{i,j}$$

où $A_{i,j}$ est le déterminant obtenu en enlevant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A .

3. Existence et unicité du déterminant.

Il existe une unique forme n -linéaire alternée en les colonnes $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(I_n) = 1$.

4. Expression de l'inverse d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^{\text{tcom}}(A) = {}^{\text{tcom}}(A)A = \det(A)I_n$.

5. Caractérisation de l'inversibilité par le déterminant.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

6. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors $\det \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ D & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B) =$

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{p,n} & D \end{pmatrix}.$$

7. Déterminant d'un endomorphisme.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit le déterminant de f , noté $\det(f)$ comme le déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base de E , i.e. si $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E , alors $\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

8. Déterminant de Vandermonde.

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Alors le déterminant de Vandermonde :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Exercice 2 :

Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le déterminant $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ est nul.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il suffit de calculer :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 1 & 1 \\ 6-\lambda & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 6-\lambda & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 6-\lambda & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$= (6-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (6 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} & \begin{aligned} C_2 &\leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 &\leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 &\leftarrow C_4 - C_1 \end{aligned} \\
 &= (6 - \lambda)(2 - \lambda)^2(1 - \lambda)
 \end{aligned}$$

Donc le déterminant est nul si et seulement si $\lambda \in \{1, 2, 6\}$.