DS 10
Déterminant - Dénombrement - Groupe Symétrique

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 7 Mai 2025

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

Problème 1 (Déterminant à triangles constants) :
Dans tous le problème, a, b, c sont des réels et n un entier naturel supérieur ou égale à 1.

Partie I : Déterminant à triangles constants et à diagonale constante

Soit Δ_n le déterminant de la matrice carré de taille n formée de la manière suivante :

Les éléments de la diagonale principale sont égaux à a, ceux au dessus de la diagonale valent b et ceux en-dessous de la diagonale sont égaux à c.

Donc on a

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

1. Calculer Δ_1, Δ_2, Δ_3.
2. (a) Calculer Δ_n dans le cas $a = b$.
   (b) Calculer Δ_n dans le cas $a = c$.
   (c) Calculer Δ_n dans le cas $b = c$.
3. On suppose $b \neq c$ et $n \geq 3$.
   (a) Établir que $\Delta_n - (2a - b - c)\Delta_{n-1} + (a - b)(a - c)\Delta_{n-2} = 0$
   (b) Donner l'expression du terme général de la suite $(\Delta_n)_{n\geq 1}$.

Partie II : Un cas particulier en dimension 4

On se place dans le cas de la partie précédente où $b = c$ et $n = 4$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associée à A. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(\lambda I_4 - A)$. Déterminer les valeurs de λ pour lesquels ce déterminant s'annule.
5. Déterminer une base de $\ker(f - (a + 3b)\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4})$. On appellera ε_1 un vecteur générateur de cet espace.
6. Déterminer une base de $\ker(f - (a - b)\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4})$. On appellera $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ des vecteurs générateurs de cet espace.
7. Montrer que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
8. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
9. En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Partie III : Déterminants à triangles constants

Désormais, on considère $a_1, \ldots, a_n$ des réels. On désire calculer le déterminant D_n de la matrice carrée de taille n formée de la manière suivante :

> Les coefficients diagonaux sont les $a_1, \ldots, a_n$, les coefficients au dessus de la diagonale sont égaux à b et ceux en dessous sont égaux à c.

Ainsi $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_3 \end{vmatrix}$, etc.

On suppose $b \neq c$.

On pose $d_n(x)$ le déterminant de la matrice obtenue en en ajoutant x à tous les coefficients de la matrice définissant D_n. Donc

$$d_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \ldots & b + x \\ c + x & a_2 + x & \ldots & b + x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c + x & \ldots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}$$

10. Montrer que $x \mapsto d_n(x)$ est une fonction affine, ie $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = \alpha x + \beta$.
11. Calculer α, β en évaluant d_n pour des valeurs de x bien choisies
12. En déduire l'expression de D_n.

Partie IV : Déterminants de puissances

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$. On pose $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j} = a^{ij}$. On note enfin $\delta_n = \det(A_n)$.

13. Calculer δ_1 et δ_2.
14. On suppose $n \geq 3$. Calculer δ_n lorsque $a^2 = 1$.
15. On suppose $n \geq 3$ et $a^2 \neq 1$. On suppose aussi $\delta_{n-1} \neq 0$. On pose alors

$$P_n(X) = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & X \\ a^2 & a^4 & a^6 & \cdots & a^{2(n-1)} & X^2 \\ a^3 & a^6 & a^9 & \cdots & a^{3(n-1)} & X^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{2(n-1)} & a^{3(n-1)} & \ldots & a^{(n-1)^2} & X^{n-1} \\ a^n & a^{2n} & a^{3n} & \cdots & a^{n(n-1)} & X^n \end{vmatrix}$$

(a) Justifier que P_n est un polynôme de degré n dont on donnera le coefficient dominant.

(b) Factoriser P_n.

(c) En déduire une expression de δ_n en fonction de δ_{n-1} et a.

(d) Montrer alors que

$$\forall n \geq 2,\ \delta_n = a^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)^{n-k}.$$

Problème 2 (Nombres de partitions de cardinal imposé) :
Soit E un ensemble fini non vide. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que $\{A_1, \ldots, A_k\}$ est une partition de E en k classes si :

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E \quad ; \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\},\ A_i \neq \emptyset \quad ; \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, k\},\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Partie I : Nombres de partitions

Si $n \in \mathbb{N}$, on notera $r(n)$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On conviendra que $r(0) = 1$.

Soit E un ensemble non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $r(n, k)$ le nombre de partitions de E en partition en k classes.

1. En faisant la liste des partitions de $\{1, 2, \ldots, n\}$, déterminer $r(n)$ pour $n \in \{1, 2, 3\}$.
2. Montrer que $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$, $k > n \implies r(n, k) = 0$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r(n) = \sum_{k=1}^{n} r(n, k)$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r(k)$.
5. Calculer $r(4)$, $r(5)$ et $r(6)$.
6. Montrer que $\forall n \geq 5$, $r(n) \geq 2^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $r(n) \leq n^n$.
7. Si $n, k \in \mathbb{N}$, on note $S(n, k)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à k éléments.

   Montrer que : $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$, $S(n, k) = k! r(n, k)$.

Partie II : Nombres de partitions de classes paires

Soit E un ensemble non vide de cardinal $2m$ avec $m \geq 1$.

On note a_m le nombre de partitions de E en m classes qui sont toutes des paires (*i.e.* le nombre de partitions en sous-ensembles tous de cardinal 2).

8. Déterminer a_1, a_2 et a_3. On conviendra que $a_0 = 1$.
9. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $a_m = (2m - 1) a_{m-1}$.
10. En déduire que $\forall m \in \mathbb{N}$, $a_m = \frac{(2m)!}{2^m m!}$.

Partie III : Nombres d'involutions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en classes qui sont des paires ou des singletons (donc des sous-ensembles qui sont de cardinal 2 ou 1).

Soit E un ensemble non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4.

12. On suppose $n = 2m$, $m \geq 1$. Montrer que $b_{2m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} a_{m-k}$.
    Indic : *Classer les partitions suivant le nombre de singletons qu'elles contiennent.*
13. Montrer que $\forall n \geq 3$, $b_n = b_{n-1} + (n-1)b_{n-2}$.
14. Calculer b_5 et b_6.
15. Compter le nombre d'involution dans $\mathfrak{S}_n$.