DS 10
Déterminant - Dénombrement - Groupe Symétrique
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 7 Mai 2025

Problème 1 (Déterminants à triangles constants) :

Partie I : Déterminants à triangles constants et diagonale constante.

1. Avec beaucoup d'effort, on a $\Delta_1 = a$. Avec un tout petit effort supplémentaire, $\Delta_2 = a^2 - bc$ et enfin la formule de Sarrus nous donne

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix} = a^3 + bc^2 + b^2c - 3abc$$

2. (a) Dans le cas $a = b$, on a $\forall n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a \\ c & a & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & c & \dots & a & a \\ c & c & \dots & c & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & 0 \\ a & a & \dots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & c & \dots & a & 0 \\ a & c & \dots & c & a-c \end{vmatrix} && C_n \leftarrow C_n - C_{n-1} \\
&= (a-c)\Delta_{n-1}
\end{aligned}$$

Et donc par récurrence facile, on a $\Delta_n = (a-c)^{n-1}\Delta_1 = a(a-c)^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

(b) On se met dans le cas $a = c$. Alors $\forall n \geq 1$,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ a & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & \dots & a \\ b & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} \qquad \text{transposée}$$
$$= a(a-b)^{n-1}$$

(c) On se met dans le cas $b = c$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \dots & a \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$$
$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \dots & a \end{vmatrix}$$
$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 & \leftarrow & L_2 - L_1 \\ & \vdots & \\ L_n & \leftarrow & L_n - L_{n-1} \end{matrix}$$
$$= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

3. On a $n \geq 3$ et $b \neq c$

(a) On va faire des opérations sur les lignes et les colonnes pour établir la relation. Allons-y.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & a & b & \dots & \\ c & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a-b & b & b & \dots & b \\ c-a & a & b & \dots & b \\ 0 & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c & c & \dots & a \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$
$$= \begin{vmatrix} 2a-b-c & b-a & 0 & \dots & 0 \\ c-a & a & b & \dots & b \\ 0 & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c & c & \dots & a \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$
$$= (2a-b-c)\Delta_{n-1} - (c-a) \begin{vmatrix} b-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & b \\ c & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$= (2a-b-c)\Delta_{n-1} - (c-a)(b-a)\Delta_{n-2}$$

ce qui nous donne la relation demandée.

(b) La suite $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $X^2-(2a-b-c)X+(a-b)(a-c)$. Le discriminant de ce polynôme est $(2a-b-c)^2-4(a-b)(a-c) = b^2-2cb+c^2 = (b-c)^2 > 0$. Il admet donc deux racines réels distinctes $r_1 = a-b$ et $r_2 a - c$ (qui sont éventuellement à échangées selon que $b > c$ ou $c < b$). On en déduit donc que $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Les valeurs en $n=1$ et 2 nous permettent d'obtenir les valeurs de λ et μ. On a

$$\begin{cases} \Delta_1 = a = \lambda r_1 + \mu r_2 \\ \Delta_2 = a^2 - bc = \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ (a-b)^2 & (a-c)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a^2-bc \end{pmatrix}$$

On suppose $a \neq b$ et $a \neq c$. Le déterminant de la matrice de ce système est $r_1 r_2 (r_2 - r_1) = (a-b)(a-c)(b-c) \neq 0$. Le système est donc de Cramer et on obtient donc

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\begin{vmatrix} a & a-c \\ a^2-bc & (a-c)^2 \end{vmatrix}}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{a(a-c)^2-(a-c)(a^2-bc)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{-c}{b-c} \\ \mu = \dfrac{\begin{vmatrix} a-b & a \\ (a-b)^2 & a^2-bc \end{vmatrix}}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(a-b)(a^2-bc)-a(a-b)^2}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{b}{b-c} \end{cases}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

On remarque que cette relation est encore vraie si $a = b$ ou $a = c$ (on notera que les trois paramètres ne peuvent être égaux en même temps) en vertu de la question 2 déjà traitée.

Partie II : Un cas particulier en dimension 4

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$$

et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canonique associée à A et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I_4 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-a & -b & -b & -b \\ -b & \lambda-a & -b & -b \\ -b & -b & \lambda-a & -b \\ -b & -b & -b & \lambda-a \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-a-3b) \begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b \\ 1 & \lambda-a & -b & -b \\ 1 & -b & \lambda-a & -b \\ 1 & -b & -b & \lambda-a \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3+C_4 \\
&= (\lambda-a-3b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-a+b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-a+b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda-a+b \end{vmatrix} && \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + bC_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + bC_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + bC_1 \end{matrix} \\
&= (\lambda-a-3b)(\lambda-a+b)^3
\end{aligned}$$

Et donc $\det(\lambda I_4 - A) = 0 \iff \lambda \in \{a+3b, a-b\}$.

5. Par linéarité de la représentation matricielle,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f-(a+3b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}) = A-(a+3b)I_4 = \begin{pmatrix} -3b & b & b & b \\ b & -3b & b & b \\ b & b & -3b & b \\ b & b & b & -3b \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $C_1+C_2+C_3+C_4 = 0$. Donc, $(A-(a+3b)I_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$. Et donc, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f-(a+3b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((1,1,1,1)) = 0$. Donc $(1,1,1,1) \in \ker(f-(a+3b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$ par isomorphisme de représentation matricielle.

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f-(a+3b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3b & b & b & b \\ b & -3b & b & b \\ b & b & -3b & b \\ b & b & b & -3b \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} && b \neq 0 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} && C_4 \leftarrow C_1+C_2+C_3+C_4 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && L_4 \leftarrow L_1+L_2+L_3+L_4 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} && C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} && \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2+C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3+C_1 \end{matrix} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Et donc, par théorème du rang, $\dim(\ker(f-(a+3b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})) = 4-3 = 1$. Donc $\ker(f-(a+3b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}) = \mathrm{Vect}((1,1,1,1))$.

On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1,1)$.

6. Par isomorphisme de représentation matricielle,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f-(a-b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}) = A-(a-b)I_4 = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

Comme $b \neq 0$, alors $f-(a-b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} \neq 0$. Donc $\mathrm{rg}(f-(a-b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}) \geq 1$. Or $C_1 = C_2 = C_2 = C_4$. Donc $\mathrm{rg}(f-(a-b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})) = 1$ par élimination dans un Vect. Donc, par théorème du rang, $\dim(\ker(f-(a-b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})) = 3$.

Or, par lecture matricielle sur $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f-(a-b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$, $C_1 = C_2$, $C_1 = C_3$ et $C_1 = C_4$. Donc, par produit matriciel et par isomorphisme de représentation matricielle, $(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1) \in \ker(f-(a-b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$.

On pose $\varepsilon_2 = (1,-1,0,0)$, $\varepsilon_3 = (1,0,-1,0)$, $\varepsilon_4 = (1,0,0,-1)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4) &= \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)) && \text{iso rep mat} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $(\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ est une base de $\ker(f-(a-b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$.

7. On pose $\mathcal{C} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$. Alors

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_2 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_4 = e_1 - e_4 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 4e_1 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_2 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_4 = e_1 - e_4 \end{cases} && L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \\
\iff & \begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 4e_1 \\ \varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 4e_2 \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 4e_3 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 3\varepsilon_4 = 4e_4 \end{cases} && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - 4L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 - 4L_4 \end{matrix} \\
\iff & \begin{cases} \frac{1}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = e_1 \\ \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = e_2 \\ \frac{1}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4) = e_3 \\ \frac{1}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 3\varepsilon_4) = e_4 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit facilement que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^4$. Donc $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$. Et donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

8. Par construction, $\varepsilon_1 \in \ker(f-(a+3b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$. Donc $f(\varepsilon_1) = (a+3b)\varepsilon_1$. Et $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4 \in \ker(f-(a-b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$. Donc $f(\varepsilon_2) = (a-b)\varepsilon_2$, $f(\varepsilon_3) = (a-b)\varepsilon_3$ et $f(\varepsilon_4) = (a-b)\varepsilon_4$.

Donc,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & f(\varepsilon_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a+3b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{array}$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{diag}(a+3b, a-b, a-b, a-b)$.

9. On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Comme $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, P est donc la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$, donc P est une matrice de passage, donc P est inversible. Et $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.

Par formule de changement de bases, on a donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = P\,\mathrm{diag}(a+3b, a-b, a-b, a-b)P^{-1}.$$

Par opération dans les classes de similitudes, on a alors

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = (P\,\mathrm{diag}(a+3b, a-b, a-b, a-b)P^{-1})^p = P\,\mathrm{diag}(a+3b, a-b, a-b, a-b)^p P^{-1} = P\,\mathrm{diag}((a+3b)^p, (a-b)^p, (a-b)^$$

Or

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \qquad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N},\ A^p &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+3b)^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a-b)^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (a+3b)^p & (a-b)^p & (a-b)^p & (a-b)^p \\ (a+3b)^p & -(a-b)^p & 0 & 0 \\ (a+3b)^p & 0 & -(a-b)^p & 0 \\ (a+3b)^p & 0 & 0 & -(a-b)^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (a+3b)^p + 3(a-b)^p & (a+3b)^p - (a-b)^p & (a+3b)^p - (a-b)^p & (a+3b)^p - (a-b)^p \\ (a+3b)^p - (a-b)^p & (a+3b)^p + 3(a-b)^p & (a+3b)^p - (a-b)^p & (a+3b)^p - (a-b)^p \\ (a+3b)^p - (a-b)^p & (a+3b)^p - (a-b)^p & (a+3b)^p + 3(a-b)p & (a+3b)^p - (a-b)^p \\ (a+3b)^p - (a-b)^p & (a+3b)^p - (a-b)p & (a+3b)^p - (a-b)^p & (a+3b)^p + 3(a-b)^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie III : Déterminants à triangles constants.

10. Soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} d_n(x) &= \begin{vmatrix} a_1+x & b+x & \dots & b+x \\ c+x & a_2+x & \dots & b+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c+x & c+x & \dots & a_n+x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1+x & b-a_1 & \dots & b-a_1 \\ c+x & a_2-c & \dots & b-c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c+x & 0 & \dots & a_n-c \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} C_2 & \leftarrow & C_2 - C_1 \\ & \vdots & \\ C_n & \leftarrow & C_n - C_1 \end{array} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b-a_1 & \dots & b-a_1 \\ c & a_2-c & \dots & b-c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & 0 & \dots & a_n-c \end{vmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{vmatrix} x & b-a_1 & \dots & b-a_1 \\ x & a_2-c & \dots & b-c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & 0 & \dots & a_n-c \end{vmatrix}}_{x\alpha} \qquad \text{Linéarité 1ere colonne}$$

$$= \beta + x\alpha$$

où α et β sont des déterminants indépendants de x (x n'apparaît pas dans les coefficients des matrices). Donc $d_n(x)$ est une fonction affine en x.

11. On va évalué en $-c$ et $-b$. On a

$$d_n(-b) = \begin{vmatrix} a_1-b & 0 & \dots & 0 \\ c-b & a_2-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c-b & c-b & \dots & a_n-b \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(a_k-b)$$

car la matrice est triangulaire inférieure.

De même,

$$d_n(-c) = \begin{vmatrix} a_1-c & b-c & \dots & b-c \\ 0 & a_2-c & \dots & b-c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n-c \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(a_k-c)$$

car la matrice est triangulaire supérieure.

12. On en déduit donc le système

$$\begin{cases} \beta - b\alpha = \prod_{k=1}^{n}(a_k-b) \\ \beta - c\alpha = \prod_{k=1}^{n}(a_k-c) \end{cases}$$

d'où l'on déduit facilement par la méthode de votre choix (déterminant dans un système de Cramer ou combinaison linéaire sur les lignes) que

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_k-b)-\prod_{k=1}^{n}(a_k-c)}{c-b} \\ \beta = \frac{c\prod_{k=1}^{n}(a_k-b)-b\prod_{k=1}^{n}(a_k-c)}{c-b} \end{cases}$$

Finalement,

$$D_n = d_n(0) = \beta = \frac{c\prod_{k=1}^{n}(a_k-b) - b\prod_{k=1}^{n}(a_k-c)}{c-b}$$

Partie IV : Déterminants de puissances.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $a_{i,j} = a^{ij}$.

13. On a donc

$$\delta_1 = \det(A_1) = \det\begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = a$$

et

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a^5 - a^4 = a^4(a-1)$$

par Sarrus.

14. Soit $n \geq 3$. On suppose $a^2 = 1$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $a^{3k} = (a^3)^k = a^k$. Et donc, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$, $a_{1,j} = a^j = a^{3j} = a_{3,j}$. Donc $L_1(A_n) = L_3(A_n)$. Donc $\delta_n = \det(A_n) = 0$.

15. On suppose encore $n \geq 3$ et $a^2 \neq 1$. On suppose aussi $\delta_{n-1} \neq 0$. On pose

$$P_n(X) = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & X \\ a^2 & a^4 & a^6 & \cdots & a^{2(n-1)} & X^2 \\ a^3 & a^6 & a^9 & \cdots & a^{3(n-1)} & X^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{2(n-1)} & a^{3(n-1)} & \cdots & a^{(n-1)^2} & X^{n-1} \\ a^n & a^{2n} & a^{3n} & \cdots & a^{n(n-1)} & X^n \end{vmatrix}$$

(a) En développant le déterminant P_n selon la dernière colonne, on a

$$P_n(X) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} X^i (P_n)_{i,n}$$

où $(P_n)_{i,n}$ est le déterminant obtenue en enlevant la i-ème ligne et la n-ème colonne de P_n. Par conséquent, tous les $(P_n)_{i,n}$ sont des constantes indépendantes de X. Donc $P_n(X)$ est bien un polynôme.

D'autre part,

$$(P_n)_{n,n} = \begin{vmatrix} a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{2(n-1)} & \cdots & a^{(n-1)^2} \end{vmatrix} = \delta_{n-1} \neq 0.$$

Donc P_n est bien de degré n. Et son coefficient dominant est δ_{n-1}.

(b) On remarque aisément que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\},\ \widetilde{P_n}(a^k) = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & a^k \\ a^2 & a^4 & a^6 & \cdots & a^{2(n-1)} & a^{2k} \\ a^3 & a^6 & a^9 & \cdots & a^{3(n-1)} & a^{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{2(n-1)} & a^{3(n-1)} & \cdots & a^{(n-1)^2} & a^{k(n-1)} \\ a^n & a^{2n} & a^{3n} & \cdots & a^{n(n-1)} & a^{kn} \end{vmatrix} = 0$$

car la k-ème colonne et la dernière sont égales.

De plus, on a facilement aussi $\widetilde{P_n}(0) = 0$ car la dernière colonne est nulle.

Finalement, on vient de montrer que P_n a n racines $0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ et elles sont distinctes deux à deux (car $a \neq 0$ et $a^2 \neq 1$). Donc finalement, P_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. Comme $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = \delta_{n-1}$, on en déduit

$$P_n(X) = \delta_{n-1} X \prod_{k=1}^{n-1} (X - a^k).$$

(c) Par définition de δ_n, on a

$$\begin{aligned} \delta_n &= \widetilde{P_n}(a^n) && \text{def } \delta_n \\ &= \delta_{n-1} a^n \prod_{k=1}^{n-1} (a^n - a^k) && \text{cf 9.c} \\ &= \delta_{n-1} a^n \prod_{k=1}^{n-1} a^k \prod_{k=1}^{n-1} (a^{n-k} - 1) && \\ &= \delta_{n-1} a^n a^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} (a^j - 1) && \text{chgt indice } j = n-k \\ &= \delta_{n-1} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1). && \end{aligned}$$

(d) Le raisonnement de la question précédente peut être tenu pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Donc on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3,\ \delta_n = \delta_{n-1} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)$$

sous condition que $\delta_{n-1} \neq 0$.

Mais on a montré que $\delta_1 = a \neq 0$ et $a^{\frac{2(2+1)(2+2)}{6}} \prod_{k=1}^{1} (a^k - 1)^{2-k} = a^4(a-1) = \delta_2 \neq 0$ car $a^2 \neq 1$ et $a \neq 0$.

Supposons qu'il existe $n \geq 2$ tel que $\delta_n = a^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)^{n-k} \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1} &= \delta_n a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \prod_{k=1}^{n} (a^k - 1) && \text{car } n+1 \geq 3 \\
&= a^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)^{n-k} \prod_{k=1}^{n} (a^k - 1) && \text{HR} \\
&= a^{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}} (a^n - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)^{n+1-k} \\
&= a^{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}} \prod_{k=1}^{n} (a^k - 1)^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Et comme $a \neq 0$, on a $a^{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}} \neq 0$ et $a^2 \neq 1$ nous donne $a \neq \pm 1$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $a^k \neq 1$ et donc $\prod_{k=1}^{n} (a^k - 1)^{n+1-k} \neq 0$.

Donc, par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \delta_n = a^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)^{n-k} \neq 0.$$

Problème 2 (Nombres de partitions de cardinal imposé) :

Partie I : Nombres de partitions

On note $r(n)$ le nombre de partition d'un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On convient que $r(0) = 1$.

Soit E un ensemble non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On note $r(n,k)$ le nombre de partitions de E en k classes, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule partition possible de $\{1\}$: $\{\{1\}\}$. Donc $r(1) = 1$.

Pour $n = 2$, on a les partitions suivantes de $\{1,2\}$: $\{\{1,2\}, \{\{1\},\{2\}\}\}$. Donc $r(2) = 2$.

Pour $n = 3$, on a les partitions suivantes de $\{1,2,3\}$:

$$\Big\{ \{1,2,3\},\ \{\{1\},\{2,3\}\},\ \{\{2\},\{1,3\}\},\ \{\{3\},\{1,2\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\} \Big\}.$$

Donc $r(3) = 5$.

2. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k > n$. Si il existe une partition de E en k classes, alors $\exists A_1, \ldots, A_k \subset E$ telles que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $A_i \neq \emptyset$ et $\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $E = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

En particulier, par le cardinal d'une réunion disjointe, $n = \mathrm{Card}(E) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Card}(A_i)$. Or $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $A_i \neq \emptyset$, donc $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $\mathrm{Card}(A_i) \geq 1$. Et donc

$$n = \mathrm{Card}(E) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Card}(A_i) \geq \sum_{i=1}^{k} 1 = k > n$$

Donc ☠. Donc il ne peut exister de partitions de E en k classes dès que $k > n$ et donc $r(n,k) = 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(k)$ l'ensemble des partitions de E en k classes. Alors, d'après la question 2, on a $\mathcal{P}(k) = \emptyset$ pour tout $k > n$.

D'autre part, $\forall k, k' \in \mathbb{N}$, si $k \neq k'$, alors $\mathcal{P}(k) \cap \mathcal{P}(k') = \emptyset$. On ne peut pas avoir une partition de E composées de k et k' sous-ensembles si $k \neq k'$.

Bien entendu, si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des partitions de E, alors $\mathcal{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}(k)$. En effet, une partition de E est composée d'un nombre fini (et unique) de sous-ensembles de E.

Remarque :
On notera qu'on a donc une partition de l'ensemble des partitions de E.

Finalement,

$$\begin{aligned}
r(n) &= \mathrm{Card}(\mathcal{P}) \\
&= \mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{P}(k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{P}(k)) && \text{réunion disjointe} \\
&= \sum_{k=1}^{n} r(n,k) && \text{def } r(n,k).
\end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $r(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} r(n+1,k)$.

Soit $x_0 \in E$ fixé.

Soit $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Pour avoir une partition de E en k classes, il y a nécessairement l'un des sous-ensembles de la partition qui contient x_0. Comme tous les ensembles de la partition sont non vides (par définition d'une partition), ils sont tous de cardinal ≥ 1. Et donc, l'ensemble contenant x_0 est, au minimum, de cardinal 1 (si c'est un singleton) ; et au maximum (si les $k-1$ autres ensembles de la partition sont des singletons), de cardinal $n+1-k$. Donc fabriquer l'ensemble de la partition en k classes qui contient x_0, il s'agit de choisir les autres éléments de cet ensemble dans $E \setminus \{x_0\}$. Cet ensemble est de cardinal $j \in \{1, \ldots, n+1-k\}$. Donc il s'agit de choisir $j-1 \in \{0, \ldots, n-k\}$ éléments dans $E \setminus \{x_0\}$. Il y a $\binom{n+1-k}{j}$ façon de fabriquer le sous-ensemble de la partition en k classes de E qui contient x_0.

Une fois cet ensemble de la partition en k classes fabriqué, il reste à choisir les $k-1$ autres sous-ensemble de la partition dans son complémentaire. Et ils doivent former une partition de ce complémentaire en $k-1$ classes. On a donc $r(n+1-j, k-1)$ façons de faire cette partition.

Finalement :

$$\begin{aligned}
r(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} r(n+1,k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+2-k} \binom{n}{j-1} r(n+1-j, k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=k-1}^{n} \binom{n}{n-i} r(i, k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=k-1}^{n} \binom{n}{i} r(i, k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} r(i,k) \\
&= \sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \binom{n}{i} r(i,k) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{i} r(i,k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{i} r(i,k) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} r(i)
\end{aligned}
$$

5. On a $r(4) = \binom{3}{0}r(0) + \binom{3}{1}r(1) + \binom{3}{2}r(2) + \binom{3}{3}r(3) = r(0) + 3r(1) + 3r(2) + r(3) = 15$. Et $r(5) = r(0) + 4r(1) + 6r(2) + 4r(3) + r(4) = 52$. Et le dernier $r(6) = r(0) + 5r(1) + 10r(2) + 10r(3) + 5r(4) + r(5) = 203$.

On notera que la formule de la question précédente permet également de retrouver les valeurs de trouvées à la première question.

6. On va faire des récurrences fortes. D'abord, les calculs de la question précédente montre que $r(n) \leq n^n$ pour $n \in \{1, \ldots, 6\}$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $r(k) \leq k^k$. Alors

$$
\begin{aligned}
r(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r(k) \\
&= r(0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} r(k) \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^k && \text{HR} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} n^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k \\
&= (n+1)^n \\
&\leq (n+1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

De même, la question précédente, montrer que $r(k) \leq 2^k$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $r(5) \geq 2^5$ et $r(6) \geq 2^6$. Supposons qu'il existe $n \geq 5$ tel que $\forall k \in \{5, \ldots, n\}$, $r(k) \geq 2^k$. Alors

$$
\begin{aligned}
r(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r(k) \\
&= \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} r(k) + \sum_{k=5}^{n} \binom{n}{k} r(k) \\
&\geq \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} r(k) + \sum_{k=5}^{n} \binom{n}{k} 2^k && \text{HR} \\
&= \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} r(k) + 3^n - \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} 2^k \\
&= 3^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (r(k) - 2^k) \\
&\geq 3^n
\end{aligned}
$$

D'autre part, on note que

$$
\begin{aligned}
3^n \geq 2^{n+1} &\iff n\ln(3) \geq (n+1)\ln(2) \\
&\iff n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \geq 1.7
\end{aligned}
$$

Or ici, $n \geq 5$, donc $r(n+1) \geq 2^{n+1}$.

D'où, par récurrence forte, $\forall n \geq 5$, $r(n) \geq 2^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r(n) \leq n^n$.

7. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $S(n, k)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à k éléments.
Si $n < k$, alors $S(n, k) = 0$. Mais $r(n, k) = 0$ également. Donc la relation est vraie.

Supposons $n \geq k$.

Si on considère une surjection d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à k éléments, les fibres, c'est-à-dire les ensembles des antécédents de chacun des éléments de l'arrivée, forment une partition de l'ensemble de départ en k classes. Par conséquent, pour fabriquer une telle surjection, on peut commencer par fabriquer les fibres, c'est-à-dire une partition de l'ensemble de n éléments sur départ en k classes. On a $r(n, k)$ façons de le faire.

Pour chaque partition en k classes de l'ensemble à n élément du départ, pour fabriquer une surjection sur un ensemble à k éléments, il suffit alors d'envoyer bijectivement les k classes sur les k éléments de l'arrivée (chaque ensemble de la partition du départ va alors correspondre à l'ensemble des antécédent d'un élément de l'arrivée). On construit donc une bijection entre deux ensembles à k éléments (l'ensemble des sous-ensemble du départ formant la partition en k classes, et les k éléments de l'arrivée). On a donc $k!$ telle bijection.

Finalement, $S(n, k) = k! r(n, k)$.

Partie II : Nombre de partitions de classes paires

On note a_m le nombre de partition d'un ensemble de cardinal $2m$, $m \in \mathbb{N}^*$, en classes de deux éléments.

8. a_1 correspond donc au nombre de partition en classes de deux éléments d'un ensemble de deux éléments. Il n'y a donc qu'une partition : l'ensemble en entier. Donc $a_1 = 1$.

a_2 est le nombre de partition en sous-ensemble de deux éléments d'un ensemble à 4 éléments. Par exemple si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, alors les partitions en classes de deux éléments possibles sont $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$, $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$. Donc $a_2 = 3$.

a_3 est le nombre de partition en sous-ensemble de deux éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par exemple. En classant les chiffres par ordre croissant, les partitions en classes de deux éléments possible sont

$$\left\{\begin{matrix} \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}, & \{\{1,2\},\{3,5\},\{4,6\}\}, & \{\{1,2\},\{3,6\},\{4,5\}\}, \\ \{\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\}\}, & \{\{1,3\},\{2,5\},\{4,6\}\}, & \{\{1,3\},\{2,6\},\{4,5\}\}, \\ \{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}, & \{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}, & \{\{1,4\},\{2,6\},\{3,5\}\}, \\ \{\{1,5\},\{2,3\},\{4,6\}\}, & \{\{1,5\},\{2,4\},\{3,6\}\}, & \{\{1,5\},\{2,6\},\{3,4\}\}, \\ \{\{1,6\},\{2,3\},\{4,5\}\}, & \{\{1,6\},\{2,4\},\{3,5\}\}, & \{\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}\} \end{matrix}\right\}$$

et donc $a_3 = 15$.

On considère, par convention que $a_0 = 1$.

9. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On va construire une partition d'un ensemble à $2m$ éléments en compter les choix possibles.

Pour éviter de compter plusieurs fois une même partition, on va pointé un élément x_0 et considérer l'ensemble qui va le contenir. En effet, x_0 est nécessairement dans l'un des ensemble de la partition. En ne faisant que sélectionner d'abord un ensemble de deux éléments, puis en partionnant le reste, on obtiendrait plusieurs fois la même partition : on pourrait fabrique d'abord un ensemble $\{x_1, x_2\}$ puis partitionner le reste et en particulier avoir le sous-ensemble $\{x_0, x_3\}$. Mais on pourrait aussi commencer par fabriquer le sous-ensemble $\{x_0, x_3\}$ et parmi toutes les partition du reste, se trouverait celle avec $\{x_1, x_2\}$. On aurait donc la même partition compté deux fois.

Pour fabriquer une partition en classes de deux éléments, on commence par fabriquer le sous-ensemble (à deux éléments) qui contient x_0. Il faut donc lui adjoindre un autre élément. On donc $2m - 1$ choix pour le sous-ensemble à deux éléments qui contient x_0. Pour chacun de ces choix, il reste à partition les $2m - 2$ éléments en classes à deux éléments. Et on a a_{m-1} façons de le faire.

On a donc $a_m = (2m - 1)a_{m-1}$.

10. On a $a_0 = 1 = \frac{0!}{2^0 \times 0!}$. Et $a_1 = 1 = \frac{2!}{2^1 1!}$. Et aussi $a_2 = 3 = \frac{4!}{4 \times 2!}$.

Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m = \frac{(2m)!}{2^m m!}$. Alors

$$a_{m+1} = (2m + 1)a_m = (2m + 1)\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m + 2)!}{2^m m!(2m + 2)} = \frac{(2m + 2)!}{2^{m+1}(m + 1)!}.$$

Et donc, par principe de récurrence,

$$\forall m \in \mathbb{N},\ a_m = \frac{(2m)!}{2^m m!}.$$

Partie III : Nombres d'involutions

On note b_n le nombre de partitions d'un ensemble à $n \geq 1$ éléments en classes de deux ou un seul éléments.

11. b_1 correspond au nombre de partition d'un ensemble à un seul élément. Donc $b_1 = 1$. La partition est l'ensemble lui même.

b_2 est le nombre de partitions en un ou deux éléments d'un ensemble à deux éléments. Donc, soit il y a deux singletons ; soit il y a l'ensemble en entier. Donc $b_2 = 2$.

b_3 est le nombre de partitions en un ou deux éléments d'un ensemble à trois éléments. Par exemple, pour un ensemble $\{1, 2, 3\}$, les partitions possibles sont $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$. Donc $b_3 = 4$.

Pour b_4, on va partition en deux ou un seul élément un ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. On a alors $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}$ $\{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$. Et donc $b_4 = 10$.

12. Soit $m \geq 1$. On va construire les partitions en un ou deux éléments d'un ensemble E de cardinal $2m$.

Les singletons doivent aller par paires. Donc les singletons peuvent être créés deux par deux : on choisit deux éléments de E, et on construit les deux singletons définis par ces deux éléments.

Comme E est de cardinal pair, on peut ne pas faire de singleton du tout et ne faire que des partitions en paires. Ou, au contraire, ne faire que des singletons. Donc le nombre de singletons est un nombre pair entre 0 et m.

Si $k \in \{0, \dots, m\}$, pour construire $2k$ singletons, on choisit $2k$ éléments quelconques dans E. On a $\binom{2m}{2k}$ façons de les choisir et on construit les singletons qu'ils définissent. Puis, les $2m - 2k$ éléments de E restant sont alors partitionner en paires. Et on a a_{m-k} façons de le faire d'après la partie précédente.

Donc
$$b_{2m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} a_{m-k}.$$

13. Soit $n \geq 3$. Soit E un ensemble de cardinal n.

Là aussi, de nouveau, il faut prendre garde à ne pas compter deux partitions deux fois. On point un élément $x_0 \in E$. Il y a alors deux situations : soit x_0 est dans un singleton, soit il est dans un ensemble à deux éléments.

Si x_0 est un singleton, il reste alors à partitionner $E \setminus \{x_0\}$ en ensemble à un ou deux éléments. Et on a donc b_{n-1} façons de le faire.

Si x_0 est dans une paire, il faut choisir un autre élément pour constituer la paire. On a donc $n - 1$ choix pour faire la paire contenant x_0. Puis, pour chaque paire contenant x_0, on doit partitionner les $n - 2$ éléments de E restant et on a b_{n-2} façons de le faire.

Donc $b_n = b_{n-1} + (n - 1)b_{n-2}$.

14. On en déduit $b_5 = b_4 + 4b_3 = 26$ et $b_6 = b_5 + 5b_4 = 26 + 5 \times 10 = 76$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. Pour faire une involution de E, cela revient à faire une permutation de $\mathfrak{S}_n$ d'ordre 2. Or toute permutation est le produit de cycles à supports disjoints. Donc cette permutation est le produit de cycle d'ordre 2 à supports disjoints, *i.e.* c'est le produit de transpositions.

Pour fabriquer une involution, il faut donc partitionner E en paire ou singleton. Les paires correspondants aux supports des transpositions. Il y a donc autant d'involutions que de partitions en un ou deux éléments de E. On a donc b_n involutions.