



Interrogation 26

Intégration 1

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Théorème fondamental de l'intégration.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. Alors $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I , s'annule en a et de dérivée f sur I .

2. Continuité uniforme.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

3. Inégalité triangulaire intégrale.

Soit $a < b, f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

4. Intégration par parties.

Soit $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $a, b \in I$. Alors $\int_a^b u'(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v''(t)dt$.

5. Théorème de Heine.

Toute fonction continue (simplement) sur un segment est uniformément continue sur ce segment. i.e. si $a < b, f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

6. Définition de la valeur moyenne.

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{R})$. La valeur moyenne de f est $\mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$.

7. Intégrale nulle d'une fonction continue.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

8. Approximation uniforme des fonctions cpm par des fonctions en escaliers.

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$.

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Justifier que $M = \sup_{x \in [0, 1]} f(x)$ existe. Montrer que si $\int_0^1 f(x)dx = M$, alors f est constante.

Par théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes. Donc $M = \sup_{x \in [0, 1]} f(x)$ existe (et est atteint).

Supposons $\int_0^1 f(x)dx = M$. On pose $g : x \mapsto M - f(x)$. Alors $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Alors $\forall x \in [0, 1], g(x) \geq 0$ et $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (M - f(x))dx = M - \int_0^1 f(x)dx = 0$, par linéarité de l'intégrale. Donc, par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et de signe constant, $g = 0$. Donc f est constante égale à M .