

## Chapitre 26 - TD : **Séries**

Simon Dauguet  
*simon.dauguet@gmail.com*

13 mai 2025

### 1 Convergence

#### Exercice 1 ([✓]) :

Déterminer la nature des séries de terme général (discuter la convergence selon le paramètre  $\alpha$  si besoin) :

$$1) \quad u_n = \frac{n}{n^2+1}$$

$$2) \quad u_n = \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}$$

$$3) \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$4) \quad u_n = e - (1 + 1/n)^n$$

$$5) \quad u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$6) \quad u_n = \frac{1}{n \cos(n)^2}$$

$$7) \quad u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

$$8) \quad u_n = (1/n)^{1+1/n}$$

$$9) \quad u_n = \frac{(3n)!}{9(n!)^3}$$

$$10) \quad u_n = \frac{n!e^{2n}}{n^n}$$

$$11) \quad u_n = \frac{n!}{n^{\alpha n}}$$

$$12) \quad u_n = \frac{n^\alpha \ln(n)^n}{n!}$$

$$13) \quad u_n = \frac{2^n}{n^2 \sin(\alpha)^{2n}}, \quad \alpha \in ]0, \pi[$$

$$14) \quad u_n = \binom{n+p}{p}^{-\alpha}$$

$$15) \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{2}{n+\alpha^2}\right)^n$$

#### Exercice 2 ([✓])(\* à \*\*\*) :

Déterminer la nature des séries

$$1) \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

$$2) \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$3) \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

$$4) \quad u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$$

$$5) \quad u_n = \sin(n\pi + \pi/n)$$

$$6) \quad u_n = \frac{2^n + n^2}{3^n n^2 + 1}$$

#### Exercice 3 (\*\*\*) :

Déterminer la nature des séries

$$u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n + (-1)^n)} \quad w_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$$

#### Exercice 4 (\*\*)

On va étudier la nature de la série de terme générale

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}$$

1. Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ .
2. Montrer la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

3. Montrer que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + o\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right)$$

4. En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .

**Exercice 5 :**

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont également convergentes

$$\sum \max(u_n, v_n), \quad \sum \sqrt{u_n v_n}, \quad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

**Exercice 6 :**

Soit  $\sum u_n$  une SATP convergente. Montrer que

$$\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$$

converge également.

**Indic :** S'inspirer de l'exercice précédent

**Exercice 7 ([✓]) :**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle positive et

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

Montrer que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

**Indic :** Faire une disjonction de cas.

**Exercice 8 ([✓](\*)) :**

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement positive telle que

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

1. On suppose  $\ell > -1$  ou  $\ell = -1^+$ .
  - (a) En déduire  $\exists x_0 > 1$  tel que  $\forall x \geq x_0, \frac{f'(x)}{f(x)} \geq -\frac{1}{x}$ .
  - (b) Montrer alors  $\exists \lambda > 0$  telle  $\forall x \geq x_0, f(x) \geq \frac{\lambda}{x}$ .
  - (c) En déduire la divergence de la série  $\sum f(n)$ .
2. On suppose  $\ell < -1$ . Montrer la convergence de la série  $\sum f(n)$ .

**Indic :** On introduira un  $\alpha$  bien choisi et on utilisera la comparaison série intégrale.

**Exercice 9 ([✓]) :**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

Montrer que  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ . Quelle est la nature de la série  $\sum(u_n - \ell)$  ?

**Exercice 10 ([✓]) :**

Soit  $(u_n)$  la série définie par  $u_0 \in ]0, 1[$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Existence et éventuellement calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - u_n)$$

2. Nature de  $\sum u_n$  ?

**Exercice 11 ([✓]\*) :**

Pour  $s > 1$ , on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Déterminer la limite de  $(s-1)\zeta(s)$  quand  $s \rightarrow 1^+$ .

*Indic : Comparaison série/intégrale*

**Exercice 12 ([✓]\*) :**

Si  $a > 0$ , justifier de la convergence de la série  $\sum \frac{a}{n^2+a^2}$ . Puis, par une comparaison entre séries et intégrales, déterminer

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$$

**Exercice 13 (X PC (extrait)) :**

Soit  $E$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)_{n \geq 1}$  vérifiant

$$\forall n \geq 1, u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$$

1. Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2
2. Soit  $a$  et  $b$  les éléments de  $E$  déterminés par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites divergent vers  $+\infty$

3. Calculer

$$w_n = a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}$$

4. On pose  $c_n = a_n/b_n$  pour  $n \geq 1$ . Montrer que la série  $\sum(c_{n+1} - c_n)$  est absolument convergente et en déduire l'existence  $\ell \in \mathbb{R}$  telle  $c_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

**Exercice 14 ([✓]) :**

Soit  $u_0 \in ]0, \pi/2[$  et  $u_{n+1} = \sin(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .
2. En utilisant  $u_{n+1} - u_n$ , montrer que  $\sum u_n^3$  est une série convergente.
3. En utilisant  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ , montrer que  $\sum u_n^2$  diverge.

**Exercice 15 :**

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Indic :** Comparaison série/intégrale

**Exercice 16 (Produit de Cauchy) :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k u_k.$$

1. On suppose  $\sum u_n$  absolument convergente. Montrer que  $\sum v_n$  est convergente et calculer sa somme en fonction de la somme de  $\sum u_n$ .
2. On suppose  $(u_n)$  converge vers 0. Déterminer la nature de  $(v_n)$ .
3. On suppose que  $\sum u_n$  est convergente. Montrer que  $\sum v_n$  est convergente et déterminer sa somme en fonction de la somme de  $\sum u_n$ .

**Exercice 17 (Mines-Télécom série 1) :**

On considère l'équation  $\cos(x) = nx$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , cette équation a une et une seule solution  $x_n \in \mathbb{R}_+$ .
2. Déterminer la monotonie de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et la limite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
3. Déterminer une DL de  $x_n$  à trois termes en  $1/n$ .
4. La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(\cos(x_n))$  converge-t-elle ?
5. Montrer que  $\exists c > 0$  tel que  $\prod_{k=1}^n x_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n!}$ .

**2 Calcul de somme****Exercice 18 ([✓]) :**

Après en avoir justifier l'existence, calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

**Exercice 19 :**

Nature et somme de

$$\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

**Exercice 20 :**

Existence et calcul de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

**Exercice 21 :**

Montrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln(2).$$

**Exercice 22 :**Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  converge.

Calculer alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$$

**Remarque :**

On est en train de flirter avec des séries de fonctions et même avec des séries entières dont on vous parlera l'année prochaine. Vous démontrerez alors proprement que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 23 (CCP PSI) :**Convergence et somme de  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1}$ 

Convergence et somme de

$$\sum_{n \geq 2} \frac{[\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}]}{n}$$

**Exercice 24 ([✓]) :**Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Déterminer, en fonction de  $a$  et  $b$ , la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

et calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

**Exercice 25 :**Soit  $0 < a < b$  et  $(u_n)$  une suite strictement positive telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

1. En étudiant la série  $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ , montrer que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $v_n = n^\alpha u_n$ . De façon similaire, montrer

$$\exists A > 0, u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^{b-a}}.$$

3. On suppose  $b - a > 1$ . Montrer que

$$(b - a - 1)u_n = (1 - b)(u_{n+1} - u_n) - ((n + 1)u_{n+1} - nu_n)$$

et en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

### Exercice 26 :

On rappelle l'existence de la constante d'Euler  $\gamma$  telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

1. Donner un équivalent simple de  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
2. Comparer alors  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  et  $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
3. En déduire la convergence et somme de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

### Exercice 27 (Produit de Cauchy) :

Soit  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| < 1$ . Montrer que

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n.$$

### Exercice 28 :

On considère la suite définie par  $x_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ .

1. Déterminer la limite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Déterminer un équivalent de  $x_{n+1}^2 - x_n^2$ .
3. En déduire un équivalent de  $x_n$ .

## 3 Familles sommables

### Exercice 29 :

Déterminer la nature (sommable ou non) des familles suivantes :

1.  $\left( \frac{1}{n!m!(n+m+1)} \right)_{n,m \in \mathbb{N}}$
2.  $\left( \frac{1}{(n+m)^3} \right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$
3.  $\left( \frac{1}{x^2} \right)_{x \in \mathbb{Q}^*}$
4.  $\left( \frac{1}{n^2+m^2} \right)_{n,m \in \mathbb{N}^*}$
5.  $\left( \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \right)_{p,q \geq 1}$

### Exercice 30 :

1. Montrer que la famille  $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{p,q \geq 2}$  est sommable et calculer sa somme.
2. Montrer que la famille  $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{\substack{p \geq 1 \\ q \geq 2}}$  n'est pas sommable.
3. Montrer que la famille  $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{\substack{p \geq 2 \\ q \geq 1}}$  n'est pas sommable.

**Exercice 31 :**

Soit  $r \in [0, 1[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Justifier l'existence et calculer  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$ .

**Exercice 32 :**

On rappelle  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ .

1. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .
2. En déduire la sommabilité de la famille  $\left(\frac{(-1)^{pq}}{p^2 q^2}\right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 33 :**

Pour  $s > 1$ , on note  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ .

1. Calculer

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k) - 1).$$

2. Calculer

$$S' = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (\zeta(k) - 1).$$

**Exercice 34 :**

Soit  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Trouver une CNS sur  $a, b$  pour que la famille  $\left(\frac{a^p b^q}{q!}\right)_{p,q \in \mathbb{N}}$  soit sommable. Quand c'est possible, calculer la somme.

**Exercice 35 :**

Soit  $\alpha, \beta > 1$ . Montrer

$$\sum_{p,q \geq 2} \frac{1}{p^\alpha q^\beta - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\zeta(n\alpha) - 1)(\zeta(n\beta) - 1).$$

**Exercice 36 (\*\*\*) :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ .

1. On suppose qu'il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $\varphi(0) = 0$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$  converge.
  - (a) Montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_k$  converge et que sa somme est  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$ .
  - (b) En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{na_n^2}$  converge où  $a_n$  est le nombre de chiffres qu'il faut pour écrire  $n$  en base 10.

**Indic :** On pourra utiliser  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$

2. On suppose  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge. Montrer qu'il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $\varphi(0) = 0$  telle que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k \right)^{1/2}$  converge.