Chapitre 26 - TD :

Séries

Indications

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

13 mai 2025

1 Convergence

Exercice	Indications
1	Il faut utiliser toutes les astuces qui sont à votre disposition pour déterminer la nature des séries.
2	Quel est le signe des termes généraux ? Et dans ce cas là, que peut-on faire ?
3	Il s'agit de faire un mix entre les deux exercices précédents. Il semble qu'il y ait un problème de signe. Ou pas. Et on peut se ramener à une étude de séries dont la nature est connue.
4	Cet exercice est bien guidé. Il ne faut pas se laisser distraire par l'apparente complexité des expressions à manipuler. Et reprendre l'exercice 3
5	Il suffit de faire des inégalités bien choisies pour se ramener à des comparaisons entre SATP.
6	Il faut s'inspirer de l'exo précédent et donc, faire des inégalités bien choisies. On peut penser à de la convexité, par exemple. Et particulièrement à l'inégalité arithmético-géométrique.
7	Il y a deux cas : soit $u_n \to 0$ et on peut conclure. Soit $u_n \not\to 0$ et on peut aussi s'en sortir. Par d'autres arguments.
8	Il suffit d'introduire des intégrales au bon moment.
9	C'est un exercice classique sur les suites. Reprendre donc le chapitre sur les suites et plus particulièrement la partie sur les suites récurrentes d'ordre 1. On a rajouter ensuite la dernière partie. Mais l'étude des suites nous fourni de quoi conclure.
10	C'est un jeu de manipulation sur la relation vérifiée par cette suite récurrente d'ordre 1. Un peu comme au dessus, il faut réutiliser des parties de l'étude de ce genre de suite.
11	C'est indiqué. Faire une relation série/intégrale. Attention à bien tout écrire et ne pas se perdre dans les quantificateurs.
12	Il faut s'inspirer de l'exo précédent. C'est encore une relation série/intégrale. Mais il faut l'écrire proprement et dans le bon sens.
13	1. On a une relation de récurrence *linéaire* d'ordre 2. On devrait pouvoir s'en sortir. 2. Montrer que $\forall n \geq 2$, $a_n \geq n-1$. De même pour b. 3. C'est du calcul. Ne pas oublier de conclure. 4. Partir de la question précédent, puis passer à $c_{n+1} - c_n$. L'inégalité de la question 2 va être utile à cet endroit.

14	C'est un exercice très classique. On commencer par une petite étude de suite. Puis on fait des DL avec des comparaisons de convergence de séries et de suite. Et on recommencer entre DL et comparaison de séries.
15	C'est indiqué. Série/intégrale. Attention, il y a un paramètre à prendre en compte.
16	1. C'est écrit. C'est un produit de Cauchy. Une fois qu'on l'a reconnu, c'est déjà plus facile. 2. Il faut revenir à la définition. Avec des ε. Et plus particulier, il faut penser à Césaro. On a fait un exercice dessus sur les suites. 3. C'est pour aller plus loin que la seule question précédente. Mais la question 1 donne une intuition du résultat escompté.
17	Les questions sont classiques. Sauf la dernière. Mais on a un moyen connu depuis la terminale pour passer d'un produit à une somme...

2 Calcul de somme

Exercice	Indications
18	La convergence est facile avec des comparaisons. Le calcul est plus intéressant. On rappelle qu'on ne peut faire des changement d'indice que sur des sommes *finies*. Et on rappelle aussi que la première somme correspond à seulement la somme des termes impairs d'une somme bien connue. Et la deuxième se décompose en élément simple ...
19	Convergence facile. Puis décomposition en éléments simples. En passant par les sommes partielles, tout se passe bien.
20	La convergence ne pose toujours pas de problèmes. Et en repassant ensuite aux sommes partielles, le calcul de la somme ne présente pas de difficulté.
21	La convergence, puis décomposition en éléments simples. Et pour conclure, on reconnaît une *somme* de Riemann. Car oui.
22	La convergence. Il suffit de manipuler les sommes partielles. C'est classique.
23	On regarde les sommes partielles. On commence par se concentrer sur $S_{(n+1)^2}$ plus facile à manipuler. On découpe la somme par paquet entre deux carrés successifs. Puis, on étudie la monotonie de la suite des sommes partielles. Ce qui permet de conclure.
24	DL.
25	1. Il y a un lien entre nature de série et nature de suite. 2. Il est écrit "de façon similaire". Autrement dit, c'est le même genre d'argument qu'il faut adapter) la nouvelle situation. 3. Du calcul. Puis un télescopage permet de se ramener à la question précédente.
26	En fait, ce n'est pas un exercice sur les séries. Mais sur les suites. On aurait pu mettre cet exercice dans le chapitre sur les suites. D'ailleurs, il y est. En partie.
27	C'est écrit : produit de Cauchy. Oui, mais entre quelles suites ?
28	1. C'est l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1. Il y a des méthodes pour ça. 2. On a la limite de (x_n). Donc trouver un équivalent ne devrait pas être trop difficile. 3. Ici, il faut utiliser un point du théorème de comparaison qu'on a utilisé très peu jusque là.

3 Familles sommables

Exercice	Indications
29	1. Une petite inégalité avec le théorème de Fubini discret nous permet de nous en sortir en 3 lignes. 2. Il faut utiliser les diagonales. Qui forment une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$. 3. En choisissant bien un sous-ensemble fini de $\mathbb{Q}^*$, on peut montrer facilement la non sommabilité. 4. Les diagonales. C'est vraiment bien, les diagonales. 5. D'abord un petit encadrement pour se ramener à une famille auxiliaire dont on va pouvoir montrer la sommabilité plus facilement.
30	Il faut appliquer les définitions.
31	Il faut revenir aux définitions puis faire des regroupements par paquets.
32	Les définitions. Toujours. Encore.
33	C'est du Fubini discret.
34	Commencer par la somme en q puis faire la somme en p.
35	Commencer par des comparaisons séries/intégrales pour la convergence de la série de droite. Ensuite, écrire $\frac{1}{p^\alpha q^\beta - 1}$ comme somme d'une bonne série. Et on pourra alors conclure avec du Fubini sur les SATP.
36	Les trois étoiles ne sont pas usurpées. 1.(a) Faire un regroupement par paquet. 1.(b) Poser $\varphi(n) = 10^n$ et appliquer la question précédente. 2. C'est cette question qui porte à elle seule les trois étoiles. Construire deux suites croissantes (n_j) et $(\varphi(j))$ telles que $\frac{1}{2^{1+n_j}} < \sum_{k=\varphi(j)+1}^{\varphi(j+1)} u_k \leq \frac{1}{2^{n_j}}$.