



DM 9

Intégration

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 27 Mai 2025

Pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Application.

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$ et la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

- (a) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
- (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}$.
- (c) Démontrer alors que la suite (v_n) est convergente de limite $\frac{1}{2} \ln(2)$.

2. Développement asymptotique d'une somme de Riemann.

Dans cette question, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0, 1]$ à valeurs réelles.

- (a) Justifier l'existence d'un réel M tel que $\forall x \in [0, 1]$, $|f^{(3)}(x)| \leq M$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

i. Montrer que $\forall t \in [k/n, (k+1)/n]$,

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3.$$

ii. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la primitive de $t \mapsto \left(t - \frac{k}{n}\right)^q$ qui s'annule en $\frac{k}{n}$?

iii. En déduire que

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{24n^4}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer alors que

$$\left| \int_0^1 f(t) dt - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right| \leq \frac{M}{24n^3}.$$

- (d) On définit la suite (ε_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varepsilon_n = n^2 \left(S_n(f) + \frac{1}{2n} S_n(f') + \frac{1}{6n^2} S_n(f'') - \int_0^1 f(t) dt \right).$$

Prouver que la suite (ε_n) converge vers 0, puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

(e) Justifier maintenant l'existence de deux suites (ε'_n) et (ε''_n) de limite nulle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f') = \int_0^1 f'(t)dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)dt + \varepsilon''_n.$$

Attention ! Question longue !

(f) En déduire finalement l'existence d'une suite (δ_n) de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f) = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t)dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t)dt + \frac{\delta_n}{n^2}.$$

Nous venons donc de démontrer que

$$S_n(f) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t)dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t)dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Application.

On reprend les suites (u_n) et (v_n) de la question 1.

(a) Démontrer l'existence d'une suite (α_n) de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln(2) + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2}.$$

(b) En déduire un équivalent simple de $u_n - \ln(2)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(c) Démontrer enfin que $v_n - \frac{1}{2} \ln(2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{64n^2}$.