

Chapitre 27

Espaces Préhilbertiens Réels

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

20 mai 2025



Les produits scalaires sont ce qui garantis de pouvoir évoluer dans un espace “normal”. Le produit scalaire assure de pouvoir donner un sens à la notion d’angle et la notion de distance et surtout, que les distances soient cohérentes avec son usage habituel. Dans un espace sans produit scalaire, la plus courte distance entre deux points n’est pas forcément la ligne droite. En fait, dans un espace sans produit scalaire, la notion de “ligne droite” n’a plus vraiment de sens.

Dans un espace sans produit scalaire, on peut aller plus haut que notre point de départ en ne faisant que descendre. Les Shadoks vivent dans un espace non euclidien sans produit scalaire, par exemple. C’est le cas également des dessin très connus d’Escher.

Non-Euclidean geometry is a study of
which the primary motive was logical and
philosophical.

Hendrik Anton Lorentz,
The Einstein Theory of Relativity

Table des matières

1	Produits scalaires	3
2	Norme associée à un produit scalaire	7
3	Orthogonalité	14
3.1	Vecteurs orthogonaux	14
3.2	Bases orthonormales	17
3.3	Matrices Orthogonales (HP)	25
3.4	Ensembles orthogonaux	28
4	Produit mixte	35
5	Projections orthogonales	37
6	Symétries orthogonales	40
7	Distance à un sous-espace	41

1 Produits scalaires

Définition 1.1 (Produit scalaire) :

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev. On appelle *produit scalaire* sur E , toute forme bilinéaire symétrique définie positive, i.e. toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) [Bilinéarité] Pour tout $x \in E$, $y \mapsto \varphi(x, y)$ et $y \mapsto \varphi(y, x)$ sont linéaires (donc φ est linéaire à gauche et à droite), i.e.

$$\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi(x, y + \lambda z) = \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, z) \\ \varphi(x + \lambda y, z) = \varphi(x, z) + \lambda \varphi(y, z) \end{cases}$$

- (ii) [Symétrie] $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

- (iii) [Caractère défini] $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$

- (iv) [Positive] $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$

Proposition 1.1 (Détermination pratique d'un produit scalaire) :

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors φ est un produit scalaire sur E si, et seulement si,

- (i) φ est symétrique
- (ii) φ est linéaire à droite (ou à gauche)
- (iii) $\forall x \in E, x \neq 0, \varphi(x, x) > 0$.

Démonstration :

Supposons que φ est linéaire à droite et symétrique, alors

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(x + \lambda y, z) &= \varphi(z, x + \lambda y) && \text{symétrie} \\ &= \varphi(z, x) + \lambda \varphi(z, y) && \text{linéarité à droite} \\ &= \varphi(x, z) + \lambda \varphi(y, z) && \text{symétrie} \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Donc φ est bilinéaire.

De plus, par linéarité, $\varphi(0, 0) = 0$, donc $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$. Donc φ est positive. Et si $x \in E$ tel que $\varphi(x, x) = 0$, alors $x = 0$ sinon on a une contradiction. Donc φ est défini.

Donc φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Donc φ est un produit scalaire.

La réciproque est évidente. $\square$

Remarque :

Dans la pratique, on commencera donc par montrer que φ est symétrique, puis on montrera une seule linéarité. La deuxième linéarité découlant de la première.

Pour la caractère défini positif, en fonction de la situation, il pourra être plus simple (mais pas nécessairement) de montrer les deux d'un coup. On pourra donc combiner les deux énoncés (la définition et la propriété) selon les situations pour gagner du temps (et de l'énergie).

Définition 1.2 (Espace préhilbertien réel, Espace euclidien) :

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et φ un produit scalaire sur E .

Alors (E, φ) est un *espace préhilbertien réel*.

Un espace préhilbertien de dimension finie s'appelle un *espace euclidien*.

Remarque :

On note en général un produit scalaire $(x|y)$ ou $\langle x|y \rangle$. Attention toutefois à cette notation. Elle peut être désagréable quand on a besoin de parler de l'application produit scalaire, puisqu'elle n'a plus de nom. C'est plus pratique dans les calculs, mais on perd en clarté. Il pourrait également y avoir conflit s'il devait y avoir un autre produit scalaire sur le même espace.

Il pourra être bon de refaire la démonstration dans la copie, toujours selon la situation, pour montrer que vous savez manipuler la symétrie du produit scalaire. C'est particulièrement conseillé dans le cas d'une question en début de problème qui est toujours une question de cours et qui doit faire l'objet d'une attention et d'une rigueur particulière.

Exemple 1.1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On pose

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^n \tilde{P}(x_i) \tilde{Q}(x_i).$$

Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], \varphi)$ est un espace euclidien.

Remarque (Espace préhilbertien complexe (HP)) :

On peut définir des produits scalaires également sur les $\mathbb{C}$ -ev. Mais les choses sont un peu plus compliquées. Pour des soucis de cohérences avec ce qui va suivre, on a besoin qu'un produit scalaire sur $\mathbb{C}$ soit une forme sesquilinéaire, c'est à dire linéaire à gauche et semi-linéaire à droite, au sens où c'est le conjugué du scalaire qui doit sortir. Ce qui permettra de garder le caractère défini positif.

Il n'y a donc plus non plus symétrie, mais un passage au conjugué en inversant les deux variables.

Un tel espace s'appelle un espace préhilbertien complexe. Dans le cas où il est de dimension finie, on dit que c'est un espace hermitien.

Dans la mesure où les $\mathbb{C}$ -ev peuvent être vu comme des $\mathbb{R}$, on peut faire hériter à l'espace une structure d'espace préhilbertien réel à partir de son produit scalaire complexe en prenant la partie réel du produit scalaire complexe.

Mais encore une fois, les espace préhilbertiens complexes ne sont pas au programme.

Proposition 1.2 (Produit scalaire canonique) :

1. $\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien pour le produit scalaire naturel :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est espace euclidien pour le produit scalaire naturel :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle A|B \rangle = \text{tr}(A^t B).$$

3. $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est espace préhilbertien réel pour le produit scalaire naturel :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \langle f|g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Démonstration :

1. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n y_k x_k = \langle y|x \rangle$$

par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$. Et

$$\begin{aligned} \langle x|\lambda y + z \rangle &= \sum_{k=1}^n x_k (\lambda y_k + z_k) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n x_k z_k \\ &= \lambda \langle x|y \rangle + \langle x|z \rangle \end{aligned}$$

Donc $x \mapsto \langle \cdot |x \rangle$ est linéaire. Or elle est symétrique, donc elle est linéaire à gauche. Donc $(x, y) \mapsto \langle x|y \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique. De plus, clairement, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x|x \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$, donc elle est positive et si $\langle x|x \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$, alors $\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = 0$, donc $x = 0$.

Finalement, $(x, y) \mapsto \langle x|y \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Donc c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. On notera d'abord que tr est une forme linéaire. Donc l'application est bien à valeur dans $\mathbb{R}$. De plus, la trace est invariante par transposition, donc l'application est symétrique. En effet :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle A|B \rangle = \text{tr}(A^t B) = \text{tr}({}^t(A^t B)) = \text{tr}(B^t A) = \langle B|A \rangle.$$

Elle est également directement bilinéaire car le produit matriciel est bilinéaire, la transposition est linéaire et la trace est linéaire. Ensuite, en effectuant le calcul,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle A|A \rangle = \text{tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \geq 0$$

et bien sur, on en déduit immédiatement que $\langle A|A \rangle = 0 \implies A = 0$. Donc c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Cette application est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$. Elle est également bilinéaire par linéarité de l'intégrale et par bilinéarité du produit dans $\mathbb{R}$. La positivité de l'intégrale assure la positivité de l'application. Et le caractère défini provient de l'intégrale nulle d'une fonction de signe constant. C'est donc bien un produit scalaire.

□

Remarque :

En fait, le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Il existe d'autres produits scalaires sur ces espaces. Nous en verrons d'autres. Mais ceux là sont naturels et canoniques car intrinsèque à la définition de l'espace en question.

On notera que l'on peut écrire le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ matricielle, ce qui permet de définir un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}^n$ et X, Y sont les matrices colonnes qui les représentent dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $\langle x|y \rangle = X^t Y$.



Ce ne sont pas les seuls produits scalaires sur ces espaces. Mais ils sont naturels. Ils permettent donc d'avoir toujours un produit scalaire sous la main si besoin.

Exemple 1.2 :

Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $2 \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A^2) + \text{tr}(B^2)$.

Remarque (Produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$) :

Sur $\mathbb{R}[X]$, il y a beaucoup de produits scalaires classiques. Aucun n'est vraiment préférable et donc

il n'y a pas de produit scalaire canonique. On peut noter les produits scalaires usuels suivants qui reviennent souvent :

- $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt$ qui est une extension du produit scalaire de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.
- $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$ où $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$. C'est une extension du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^n \tilde{P}(k)\tilde{Q}(k)$.

2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2.1 (Norme euclidienne) :

Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire. Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$. L'application $x \mapsto \|x\|$ s'appelle *la norme associée au produit scalaire sur E* .

Remarque :

Cette définition a bien un sens puisque le produit scalaire est positif.

Remarque :

On notera qu'il y a une norme associée à chaque produit scalaire. Donc en particulier, dans le cas où il y a plusieurs produits scalaire sur un même espaces, il y aura plusieurs normes possibles. Attention de ne pas les confondre. La notation ici peut porter à confusion. Elle est claire lorsqu'il n'y a qu'un produit scalaire et donc pas d'ambiguïté possible.

Exemple 2.1 :

1. Sur $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ s'appelle la norme 2, noté souvent $\|x\|_2$. On notera que si $n = 1$, $\|x\|_2 = |x|$. C'est la norme canonique sur $\mathbb{R}^n$.
2. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^t A)}$ est la norme canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$ est la norme canonique sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Définition 2.2 (Normes usuelles) :

On a les normes usuelles suivantes sur les espaces préhilbertiens canoniques de références (cf

1.2) :

	$\mathbb{R}^n$	$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	$\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$	Nom
$\ \cdot\ _2$	$\ x\ _2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$	$\ A\ _2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}$	$\ f\ _2 = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$	Norme 2
$\ \cdot\ _1$	$\ x\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i $	$\ A\ _1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} $	$\ f\ _1 = \int_a^b f(t) dt$	Norme 1
$\ \cdot\ _\infty$	$\ x\ _\infty = \max_{1 \leq i \leq n} x_i $	$\ A\ _\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} $	$\ f\ _\infty = \sup_{x \in [a, b]} f(x) $	Norme infinie

La norme 2 est donc la norme associée au produit scalaire canonique sur ces espaces vectoriels.

La norme infinie est bien définie sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ puisque $|f|$ est continue et le théorème des bornes atteintes assure l'existence de la borne sup. Dans le cas où f peut être définie ailleurs que l'intervalle $[a, b]$ (par exemple, en prenant une restriction de f à l'intervalle $[a, b]$), il peut être utile de préciser l'intervalle sur lequel on se place dans le choix de la norme infinie (en changeant d'intervalle, on change, *a priori*, de borne sup). On la note, pour les fonctions $\|f\|_\infty^{[a, b]}$.

Remarque (Norme (HP)) :

Une norme sur un $\mathbb{R}$ -ev E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Les normes associées à un produit scalaire sont des normes particulières. Mais toutes les normes ne proviennent pas d'un produit scalaire.

En particulier, sur $\mathbb{R}^n$, il existe 3 normes classiques : la norme 1 $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$; la norme 2 associée au produit scalaire canonique $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$; la norme infini $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Parmi ces trois normes, seule la norme 2 provient d'un produit scalaire.

L'étude générale des normes et leur comparaison est une branche de la topologie qui est au programme de MP. Par exemple, la boule de centre 0 et de rayon 1 est une sphère pour la norme 2, c'est un carré pour $\|\cdot\|_\infty$ et un losange pour $\|\cdot\|_1$.

Les notions analytiques (convergence, par exemple) dépendent de la norme que l'on utilise (c'est le début de la topologie).

Il existe d'autres normes couramment utilisées. Notamment sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On peut définir les normes p avec $p > 1$ par $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$. Elles s'appellent les normes hölderiennes.

Proposition 2.1 (Identités remarquables) :

Soit E un espace préhilbertien et $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire. Soit $x, y \in E$. Alors

- (i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x|y \rangle + \|y\|^2$
- (ii) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2 \langle x|y \rangle + \|y\|^2$
- (iii) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ [Identité du parallélogramme]

Démonstration :

(i) Il suffit de développer :

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \langle x + y|x + y \rangle \\
 &= \langle x + y|x \rangle + \langle x + y|y \rangle && \text{lin à droite} \\
 &= \|x\|^2 + \langle y|x \rangle + \langle x|y \rangle + \|y\|^2 \\
 &= \|x\|^2 + 2 \langle x|y \rangle + \|y\|^2 && \text{symétrie}
 \end{aligned}$$

(ii) Il suffit de reprendre le calcul précédent et d'utiliser la linéarité pour faire sortir le signe.

(iii) C'est assez évident en faisant la somme des deux relations précédentes.

□

Proposition 2.2 (Identités de polarisation) :

Soit E un espace préhilbertien et $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire. Soit $x, y \in E$. Alors

- (i) $\langle x|y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
- (ii) $\langle x|y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$.

Démonstration :

C'est assez évident en reprenant les identités remarquables.

□

Remarque :

L'identité de polarisation permet donc de retrouver le produit scalaire qui se cache derrière une norme, pour autant qu'il y a une. Autrement dit, si vous avez une norme dont vous savez qu'elle provient d'un produit scalaire, mais que ce produit scalaire est inconnu, on peut le retrouver à partir de la norme.

!!! ATTENTION !!!

Ça ne fonction qu'avec les normes qui proviennent d'un produit scalaire. On ne peut pas artificiellement créer un produit scalaire avec cette méthode à partir de n'importe quelle norme ! Par exemple, si on essaie avec la norme infini, en posant, sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|_\infty^2 - \|x - y\|_\infty^2)$, alors



$$\varphi(2(1, 1), (1, 0)) = \frac{1}{4}(\|(3, 2)\|_\infty^2 - \|(1, 2)\|_\infty^2) = \frac{1}{4}(9 - 4) = \frac{5}{4}$$

et

$$2\varphi((1, 1), (1, 0)) = \frac{1}{2}(\|(2, 1)\|_\infty^2 - \|(0, 1)\|_\infty^2) = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}$$

donc φ n'est pas linéaire à gauche. Et donc il n'y a pas de produit scalaire associée à la norme infinie.

Théorème 2.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) :

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

$$\forall x, y \in E, \langle x|y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

avec égalité, si et seulement si, x et y sont liés.

Démonstration :

Soit $x, y \in E$ et $y \neq 0$. On pose $h : t \mapsto \|x + ty\|^2$. Alors, par positivité du produit scalaire, $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) \geq 0$.

De plus, en développant, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \langle x + ty | x + ty \rangle = \|x\|^2 + 2t \langle x|y \rangle + t^2 \|y\|^2.$$

Donc h est une fonction polynomiale de degré 2 de signe constant. Donc h s'annule au plus une fois, i.e. son discriminant est négatif. Donc :

$$4 \langle x|y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \iff \langle x|y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Si $y = 0$, alors $\langle x|y \rangle = 0$ et $\|y\| = 0$, donc il y a égalité et donc l'inégalité est vraie.

De plus, s'il y a égalité et $y \neq 0$, alors le discriminant de h s'annule, donc h s'annule, donc $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\|x + ty\|^2 = 0$. Puis, par le caractère défini du produit scalaire, on en déduit $x + ty = 0$ et donc x et y sont liés.

La réciproque ne pose pas de problème. □

Remarque :

Il peut être utile d'avoir une autre version de l'inégalité de Cauchy-Schwarz en passant à la racine carré :

$$\forall x, y \in E, |\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

On peut aussi exprimer la première avec seulement des produit scalaire sans les normes.

Exemple 2.2 :

En particulier, on retiendra :

1. Sur $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

2. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b f g \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

Exemple 2.3 :

Soit $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$.

Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

et préciser le cas d'égalité.

Exemple 2.4 (Mines MP) :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} \geq 1$ et

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j}^2 < 1$$

Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^t X A X > 0$, puis que A est inversible.

Proposition 2.4 (Inégalité triangulaire) :

Soit E un espace préhilbertien réel, $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et il y a égalité si, et seulement si, $\exists \lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$ (x et y positivement liés).

Démonstration :

On va reprendre l'idée de la démo dans le cas complexe : soit $x, y \in E$. Alors

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \langle x|y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 && \text{Cauchy-Schwarz} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

D'où l'inégalité annoncée car tout est positif.

S'il y a égalité, alors on doit avoir $\langle x|y \rangle = \|x\|\|y\|$ qui correspond au cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, donc x et y sont liés. Et en reprenant l'égalité, on montre que le coefficient doit être positif.

La réciproque est facile. □

En fait, on peut faire un peu mieux avec :

Théorème 2.5 (Inégalité triangulaire renversée) :

Soit E un espace préhilbertien réel et $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Démonstration :

L'inégalité de droite est l'inégalité triangulaire classique. Pour l'inégalité de gauche, on considère

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x|y \rangle + \|y\|^2 \geq \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| - \|y\|)^2$$

par Cauchy-Schwarz. Il reste à passer à la racine.

Ou alors, on peut faire comme dans un exercice et considérer $\|x\| = \|(x+y) - y\| \leq \|x+y\| + \|y\|$ et échanger ensuite x et y . □

2 NORME ASSOCIÉE À UN PRODUIT SCALAIRE

Définition 2.3 (Vecteur unitaire) :

Soit E un espace préhilbertien réel et $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire.

Un vecteur $x \in E$ est dit unitaire si $\|x\| = 1$.

Remarque :

Si $x \in E$ et $x \neq 0$, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est toujours unitaire. On peut donc renormaliser toujours les choses aux besoins.

Définition 2.4 (Distance, Angle) :

Soit E un espace préhilbertien réel et $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire. Soit $x, y \in E$.

On définit la *distance de x à y* , notée $d(x, y)$ par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Remarque :

Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on peut également définir l'*angle entre x et y* par le réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right).$$

En effet, d'après Cauchy-Schwarz, $\left| \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right| \leq 1$. Donc $\arccos \left(\frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$ est bien défini et un réel de $[0, \pi]$. Et donc on a $\langle x | y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$.

Moralement, si x et y ne sont pas colinéaires, alors ils définissent un plan. L'angle angulaire correspond alors à l'angle entre x et y dans le plan qu'ils forment. On notera que le cosinus étant paire, il n'y a pas d'orientation, pour le moment, sur les angles à tenir compte. Mais ça va venir.

Définition-Propriété 2.5 (Distance à une partie) :

Soit E un espace préhilbertien réel, $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire, $A \subset E$ non vide et $x \in E$.

On définit la *distance de x à A* , notée $d(x, A)$, par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Démonstration :

A est non vide, donc $\exists a \in A$. Donc $\{\|x - a\|, a \in A\} \neq \emptyset$. Et c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$. Donc c'est un sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$, donc, par propriété de la borne inf de $\mathbb{R}$, $d(x, A)$ a un sens. $\square$

3 Orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 3.1 (Vecteurs orthogonaux) :

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $x, y \in E$.

On dit que x et y sont *orthogonaux* si $\langle x|y \rangle = 0$.

Remarque :

Bien que cette notation ne soit pas très heureuse et pas conseillée pour des vecteurs, on pourra écrire $x \perp y$.

Remarque :

Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteurs.

La notion d'orthogonalité n'a vraiment d'intérêt qu'en dimension supérieurs ou égale à 2 (et donc aussi en particulier en dimension infinie).

Définition 3.2 (Famille orthogonale, Famille orthonormale) :

Soit E un espace préhilbertien réel, soit $x_1, \dots, x_n$ une famille de vecteurs de E .

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une *famille orthogonale* si les vecteurs de la famille sont deux à deux orthogonaux, *i.e.*

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle = 0.$$

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une *famille orthonormale* si elle est orthogonale et tous les vecteurs sont unitaires, *i.e.*

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Exemple 3.1 :

Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique est une base orthonormale.

Proposition 3.1 (Orthogonalité $\implies$ liberté) :

Soit E un espace préhilbertien réel et $x_1, \dots, x_n \in E$.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale et sans vecteurs nuls, alors $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Démonstration :

Supposons $(x_1, \dots, x_n)$ orthogonale sans vecteurs nuls. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid x_k \right\rangle && \text{linéarité à gauche} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i \mid x_k \rangle && \text{linéarité à gauche} \\ &= \lambda_k \|x_k\|^2 && \text{orthogonalité} \end{aligned}$$

et donc $\lambda_k = 0$ car $x_k \neq 0$. □

Remarque :

En particulier, une famille orthonormale est automatiquement libre, sans prendre de précaution sur la non nullité.

Corollaire 3.2 (Nombres de vecteurs d'une famille orthogonale) :

Soit E un espace euclidien de dimension n .

Alors il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs tous non nuls.

Démonstration :

C'est évident puisque l'orthogonalité entraîne l'indépendance linéaire qui impose un cardinal inférieur à la dimension. □

Exemple 3.2 :

On pose $L_0(X) = (X - 1)(X - 2)$, $L_1(X) = X(X - 2)$ et $L_2(X) = X(X - 1)$.

Montrer que (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 3.3 (Théorème de Pythagore) :

Soit E un espace préhilbertien réel et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

(i) Si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

(ii) Si $n = 2$, alors $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Démonstration :

On peut le faire par récurrence sur n . Ou alors directement si on est à l'aise avec les développements :

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \langle x_i, x_j \rangle$$

Avec $n = 2$, ça provient de $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$. □

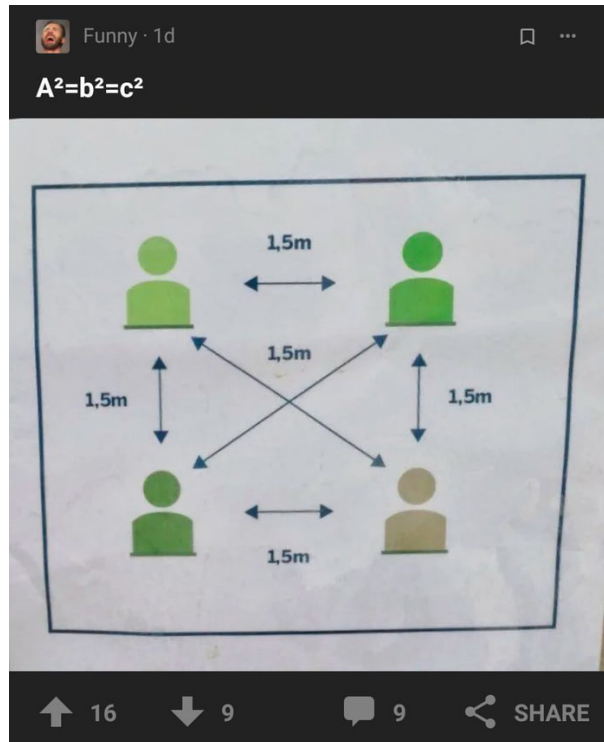


La réciproque n'est vraie que pour une famille de 2 vecteurs !

Contre-exemple :

La famille $((1, 0), (0, 1), (1, -1))$ n'est pas orthogonale et pourtant vérifie la propriété de Pythagore.

Ou alors prendre les vecteurs $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$.



3.2 Bases orthonormales

Théorème 3.4 (Existence BON) :

Soit E un espace euclidien.

Alors E admet une base orthonormale (BON).

Démonstration :

La démonstration est un algorithme permettant de fabriquer une BON à partir d'une base quelconque. C'est le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. $\square$

Proposition 3.5 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) :

Soit E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On peut construire une BON $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E à partir de $(e_1, \dots, e_n)$ de la manière suivante :

1. On pose $u_1 = e_1$.
2. Par récurrence, pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, on détermine des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}$ tels que $u_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i u_i \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})^\perp$.
3. On normalise enfin $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$.

Alors $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une BON et en plus, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et la composante de u_k selon e_k vaut 1.

Remarque :

On peut normaliser les vecteurs u_k dès leur création, au fur et à mesure. Mais des fois, une BON n'est pas forcément utile et on peut se contenter d'une base orthogonale.

Démonstration :

Il faut prouver qu'on obtient bien ce qu'on veut. C'est-à-dire qu'il faut montrer que la famille obtenue à la fin est bien une BON. Pour cela, on va montrer qu'à chaque étape, on ne change pas l'espace vectoriel engendré par les vecteurs considérés et nouvellement créés et qu'à chaque étape, on a les bonnes propriétés.

- On pose $u_1 = e_1$. Donc $u_1 \neq 0$ car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
- On cherche maintenant $u_2 \in \text{Vect}(u_1, e_2)$ tel que $\langle u_1 | u_2 \rangle = 0$. On cherche donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 = e_2 - \lambda u_1$ et $\langle u_2 | u_1 \rangle = 0$. Par linéarité à gauche du produit scalaire, on a donc $\langle u_1 | e_2 \rangle - \lambda \|u_1\|^2 = 0$ et donc $\lambda = \frac{\langle u_1 | e_2 \rangle}{\|u_1\|^2}$. D'où

$$u_2 = e_2 - \frac{\langle u_1 | e_2 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1.$$

De plus, $u_2 \neq 0$ car $(e_1, e_2) = (u_1, e_2)$ est libre. Et bien sûr, par principe de substitution, $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ (on a $e_2 = u_2 + \frac{\langle u_1 | e_2 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$).

- Supposons par récurrence que l'on ait construit $u_1, \dots, u_{k-1}$ tels que :

- ★ $(u_1, \dots, u_{k-1})$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls
- ★ $\forall j \in \{1, \dots, k-1\}$, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_j) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$
- ★ $\forall k \in \{1, \dots, k-1\}$, la composante de u_j selon e_j est 1.

On cherche maintenant $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}$ tels que $u_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})^\perp$. Soit $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Alors

$$\begin{aligned} \langle u_k | u_j \rangle = 0 &\iff \left\langle e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i u_i \middle| u_j \right\rangle = 0 \\ &\iff \langle e_k | u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \langle u_i | u_j \rangle = 0 \end{aligned} \quad \text{linéarité à gauche}$$

$$\begin{aligned} \iff \langle e_k | u_j \rangle - \lambda_j \langle u_j | u_j \rangle &= 0 & (u_1, \dots, u_{k-1}) \text{ orthogonale} \\ \iff \lambda_j &= \frac{\langle e_k | u_j \rangle}{\|u_j\|^2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$u_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u_j | e_k \rangle}{\|u_j\|^2} u_j.$$

Et alors :

- ★ $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille orthogonale par construction ($(u_1, \dots, u_{k-1})$ est orthogonale à tous les autres vecteurs).
- ★ Et $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, e_k)$ par substitution. Or $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$ donc $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
- ★ Et par construction, la composante de u_k selon e_k est 1.

On obtient finalement une famille de n vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ orthogonaux et tous non nuls en dimension n . Donc elle est libre et par caractérisation des bases en dimension finie, $(u_1, \dots, u_n)$ est donc une base orthogonale de E .

Il reste la normalisation. Ce qui ne change rien du point de vu de la liberté ou l'espace engendré. Donc

$$\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right)$$

est une BON. □

Exemple 3.3 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (1, 1, 0)$. Alors (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On pose $u_1 = e_1$.

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 = e_2 - \lambda u_1 \perp u_1$. Or $\langle u_2 | u_1 \rangle = \langle e_2 - \lambda e_1 | e_1 \rangle = \langle e_2 | e_1 \rangle - \lambda \|e_1\|^2 = 1 - 2\lambda$. On pose donc $\lambda = 1/2$. Alors $\langle u_2 | u_1 \rangle = 0$. Et donc $u_2 = (1, -1/2, -1/2)$.

On cherche maintenant $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $u_3 = e_3 - \lambda u_1 - \mu u_2$ soit orthogonal à u_1 et u_2 . Or $\langle u_3 | u_1 \rangle = \langle e_3 | u_1 \rangle - \lambda \|u_1\|^2 - \mu \langle u_1 | u_2 \rangle = 1 - 2\lambda$. Donc $u_3 \perp u_1 \iff \lambda = 1/2$. Et $\langle u_3 | u_2 \rangle = \langle e_3 | u_2 \rangle - \mu \|u_2\|^2 = 1/2 - 3/2\mu$. Et donc $u_3 \perp u_2 \iff \mu = 1/3$. Donc $u_3 = (2/3, 2/3, -2/3)$.

Alors (u_1, u_2, u_3) est une famille orthogonale de 3 vecteurs non nuls en dimension 3, donc c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

On peut enfin la normaliser avec $\|u_1\| = \sqrt{2}$, $\|u_2\| = \sqrt{3/2}$ et $\|u_3\| = 2/\sqrt{3}$. D'où

$$\varepsilon_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \varepsilon_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \varepsilon_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$



Il n'y a, bien sûr, pas unicité d'une base orthonormale dans un espace euclidien. Il y a une infinité de bases orthogonales et tout autant de bases orthonormales.

**Contre-exemple :**

Dans $\mathbb{R}^2$, $((1, 0), (0, 1))$, $((1, 1), (1, -1))$ et $((1, 2), (2, -1))$ sont des bases orthogonales. En les normalisant, on obtiendrait 3 BON différentes.

Proposition 3.6 :

Tout sev d'un espace euclidien admet une BON.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une base de ce sev. □

Proposition 3.7 (Théorème de la BON incomplète) :

Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une BON.

Démonstration :

Il suffit de la compléter par le théorème de la base incomplète et d'utiliser ensuite Gram-Schmidt. Le procédé, comme pour le théorème de la base incomplète, va "scanner" les vecteurs de la famille dans l'ordre. Si les premiers sont les vecteurs de la famille orthonormale, ils ne seront donc pas modifiés. □

Proposition 3.8 (Coordonnées et prod scal dans un BON) :

Soit E euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E . Soit $x, y \in E$. Soit $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i = \langle x | e_i \rangle, \quad \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Démonstration :

Il suffit de faire le calcul pour $\langle x | e_i \rangle$. La bilinéarité du produit scalaire fini alors le travail. Et :

$$\begin{aligned} \langle x | e_i \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k \middle| e_i \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \langle e_k | e_i \rangle && \text{lin à gauche} \\ &= x_i \|e_i\|^2 && \text{orthogonalité} \\ &= x_i && \text{unitaire} \end{aligned}$$

□

Remarque :

Autrement dit

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k, \quad \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \langle y | e_i \rangle, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2.$$



Bien prendre garde aux dépendances implicites ! Ici, on a choisi une BON pour le produit scalaire qu'on considère. En changeant de produit scalaire, une BON pour l'un n'a aucune raison de l'être pour l'autre. Les choses auront donc une bonne expression lorsqu'on utilise une bonne BON pour le produit scalaire qu'on considère.



Dit autrement, une BON a le bon goût d'être "compatible" avec le produit scalaire et va donc permettre de pouvoir tout exprimer simplement. La BON en elle-même, en général, est un peu compliqué (voir exemple précédent), mais elle permet de simplifier les calculs.

Évidemment, les expressions qu'on a ne sont valables que pour CE produit scalaire avec une BON pour CE produit scalaire.

Remarque :

On sait déjà que tout ev de dimension fini est isomorphe à un $\mathbb{R}^n$. Si on rajoute un produit scalaire, l'isomorphisme ne sera peut être pas compatible. Mais en prenant le choix d'une BON sur E (et donc d'un isomorphisme avec $\mathbb{R}^n$), alors $(E, \langle | \rangle)$ devient isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Mais là encore, tout dépend du bon choix d'une base adaptée à la situation. En prenant une autre BON, l'isomorphisme serait différent. Les techniques de calculs seraient les mêmes, le résultats des calculs aussi (le produit scalaire ne dépend pas de la base dans laquelle on exprime les vecteurs), mais les étapes intermédiaires et les coefficients seront différents.

Exemple 3.4 :

On considère l'ensemble

$$E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f'' = f\}.$$

Montrer que $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ et $\psi(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1)$ sont deux produits scalaires sur E . On choisit $\mathcal{B} = (\exp, \frac{1}{\exp})$ comme base de E . Calculer alors les expressions de ch dans les deux BON obtenues à partir de Gram-Schmidt pour les deux produits scalaires à partir de $\mathcal{B}$.

Remarque :

À partir de la proposition précédente, on en déduit aussi que si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle e_1 | u(e_1) \rangle & \langle e_1 | u(e_2) \rangle & \dots & \langle e_1 | u(e_n) \rangle \\ \langle e_2 | u(e_1) \rangle & \langle e_2 | u(e_2) \rangle & \dots & \langle e_2 | u(e_n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n | u(e_1) \rangle & \langle e_n | u(e_2) \rangle & \dots & \langle e_n | u(e_n) \rangle \end{pmatrix}$$

En effet, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$. Or, $\mathcal{B}$ est une BON, donc $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_j) | e_i \rangle e_i$. Et par unicité des coefficients dans une base, on en déduit la forme de la matrice.

Proposition 3.9 (Représentation matricielle du produit scalaire) :

Soit E euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $x, y \in E$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

On note $A = (\langle e_i | e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et

$$\langle x | y \rangle = {}^t X A Y.$$

La matrice A est la matrice représentative du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration :

Le produit scalaire étant symétrique, A l'est également. De plus, si on note $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et

$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i|e_j \rangle$$

Or

$${}^t X A Y = {}^t X \left(\sum_{j=1}^n y_j C_j(A) \right) = \sum_{j=1}^n y_j {}^t X C_j(A) = \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^n x_i a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n y_j x_i \langle e_i|e_j \rangle$$

□

Remarque :

Dans le cas où $\mathcal{B}$ est une BON, la matrice A devient l'identité et on retrouve l'expression du produit scalaire dans une BON : $\langle x|y \rangle = {}^t X Y$.

Remarque :

On peut ensuite composer les différentes propriétés des représentation matricielle : si $\mathcal{B}$ est une BON, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors

$$\langle f(x)|f(y) \rangle = {}^t X {}^t A A Y$$

Proposition 3.10 (Matrice de passages en BON) :

Soit E euclidien et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux BON de E . Alors

- (i) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1} = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$
- (ii) $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \pm 1$.

Démonstration :

Si on note $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, alors les colonnes de P représente les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Et donc $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $p_{i,j} = \langle e_i|e'_j \rangle$. Et de même, $P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ donc les coefficients de P^{-1} sont les $\langle e'_j|e_i \rangle$ d'où la transposée.

On a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ or $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = I_n$ et donc $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'))^2 = 1$. □

Remarque :

On a donc la formule de changement de bases en BON :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) {}^t P$$

avec $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, ce qui simplifie un peu les choses pour les calculs des matrices de changements de bases.



Le déterminant d'une BON dans une BON est toujours ± 1 , mais la réciproque est fausse ! Ce serait trop facile. Ce n'est pas parce que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \pm 1$ et que $\mathcal{B}$ est un BON par exemple que l'on peut en déduire que $\mathcal{B}'$ est une BON. Ni même si c'est $\mathcal{B}'$ qui est une BON.



Contre-exemple :

La base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est une BON pour le produit scalaire canonique, $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ mais pourtant $\mathcal{B}'$ n'est clairement pas une BON.

Définition 3.3 (Orientation d'un espace euclidien) :

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent la même *orientation* de E si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$. Et elles définissent des orientations contraires sinon.

Remarque :

Il ne peut y avoir que deux orientations possibles puisqu'il n'y a que deux signes possibles. De plus, comme $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1 > 0$, les deux déterminants ont le même signe. Donc il n'y a pas d'ambiguïtés sur le signe du déterminant que l'on calcule (en changeant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on obtient un autre déterminant mais de même signe).

Définition 3.4 (Orientation de $\mathbb{R}^n$, Base directe, Base indirecte) :

Dans $\mathbb{R}^n$, l'orientation définie par la base canonique est l'orientation directe. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on dit que c'est une *base directe* si elle définit la même orientation que la base canonique (i.e. l'orientation directe), i.e. si $\mathcal{C}$ est la base canonique, $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) > 0$.

Si $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) < 0$, alors $\mathcal{B}$ est une *base indirecte*.

Remarque :

On peut alors parler aussi de bases orthogonale directe ; de base normée indirecte ; une base ortho-normée directe (BOND) etc. On peut mélanger les informations puisqu'elles sont indépendantes les unes des autres.

Définition 3.5 (Espace euclidien orienté) :

Soit E un espace euclidien.

On dit que E est orienté s'il est muni d'une orientation, c'est-à-dire s'il est muni d'un choix d'une base dont l'orientation est défini comme directe. Toutes les bases définissant la même orientation que l'orientation choisie sont dites des bases directes. Les autres bases (définissant donc l'autre orientation) sont des bases indirectes.

Remarque :

Dans le cas des espaces vectoriels euclidiens muni d'une BON canonique, l'orientation de la base canonique est celle choisie comme l'orientation directe.

Exemple 3.5 :

On se place dans $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f'' - f = 0\}$. La base $\mathcal{B} = (t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t})$ et la base $\mathcal{C} = (\text{ch}, \text{sh})$ définissent des orientations contraires. Si on considère la nouvelle base $\mathcal{D} = (t \mapsto e^t + e^{-t}, t \mapsto e^t)$, alors $\mathcal{D}$ est une base indirecte si on choisit l'orientation de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est une base directe si on choisit l'orientation de $\mathcal{C}$.

3.3 Matrices Orthogonales (HP)

Définition 3.6 (Matrice orthogonale, Groupe orthogonale d'ordre n) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est une *matrice orthogonale* si, et seulement si, $A^t A = I_n$.

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On l'appelle *groupe orthogonale d'ordre n* .

Remarque :

Je privilégierai la notation $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à la notation $\mathcal{O}(n)$, la second pouvant introduire une ambiguïté sur la nature des coefficients. Au programme, il n'y a que les espace préhilbertiens réels, mais ça

ne veut pas dire que les espaces préhilbertiens complexes (voir même sur un autre corps) n'existent pas. Et les notations sont relativement similaires. Autant s'habituer dès maintenant à prendre une notation qui ne rentrera pas en conflit avec une éventuelle généralisation ultérieure. Et qui laisse en plus sous-entendre qu'il est possible de généraliser ces notions.

Proposition 3.11 (Caractérisations des matrices orthogonales) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a équivalence entre :

- (i) $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
- (ii) $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = {}^tA$.
- (iii) $A {}^tA = {}^tAA = I_n$.
- (iv) ${}^tA \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
- (v) Les colonnes de A forment une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique (par isomorphisme canonique avec $\mathbb{R}^n$)
- (vi) Les lignes de A forment une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique (par isomorphisme canonique avec $\mathbb{R}^n$)

Démonstration :

- (i) $\Rightarrow$ (ii) C'est évident puisque la matrice est carré. Donc inversible à droite est équivalent à inversible à gauche qui est équivalent à inversible. Et tous les inverses coïncident.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Évident
- (iii) $\Rightarrow$ (iv) C'est évident aussi.
- (i) $\Leftrightarrow$ (v) $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $({}^tAA)_{i,j} = {}^tC_i C_j = \langle C_i | C_j \rangle$ et d'où l'équivalence.
- (iv) $\Leftrightarrow$ (vi) Il suffit de transposer le (v).

□



Pour une matrice ortho**G**onale, les colonnes sont ortho**N**ormales !

Exemple 3.6 :

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

Remarque :

On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux BON, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale. En effet, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

Proposition 3.12 (Structure) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour le produit matriciel.

Démonstration :

C'est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. En effet, $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, si $M, N \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $(MN)^t MN = MN^t N^t M = I_n$ et $(M^{-1})^t M^{-1} = ({}^t M M)^{-1} = I_n$. $\square$

Remarque (Formule de changement de base en BON) :

On rappelle les changements de bases en BON :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = {}^t P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P.$$

Définition 3.7 (Groupe spécial orthogonal) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *groupe spécial orthogonal d'ordre n* , noté $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{SO}(n)$) le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif. Les matrices de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ sont dites *matrices orthogonales positives*. On note aussi parfois $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal.

Les matrices orthogonales de déterminant négatif sont appelées *matrices orthogonales négatives*.

Remarque :

Autrement dit,

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Ou encore, $\det$ étant un morphisme de groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est alors le noyau de ce morphisme.

Remarque :

Par isomorphisme de représentation matricielle, les matrices orthogonales représentent, elles-aussi, des endomorphismes d'un ev de dimension finie. Ce sont les isométries vectorielles. On peut étendre la caractérisation des matrices orthogonales aux isométries. Et on peut classifier ces isométries. Ce sera fait en deuxième année.

Remarque :

A noter qu'on peut alors donner un sens vectorielle à la transposition. On peut montrer que si E est un espace euclidien, alors $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\exists ! f^* \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x, y \in E$, $\langle f(x)|y \rangle = \langle x|f^*(y) \rangle$. L'endomorphisme f^* s'appelle l'adjoint de f . Et si $\mathcal{B}$ est une BON de E , alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

3.4 Ensembles orthogonaux

Définition 3.8 (Ensembles orthogonaux) :

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $A, B \subset E$ des parties non vides de E .

On dit que A et B sont *orthogonales* si tous les éléments de A sont orthogonaux à tous les éléments de B , i.e. si $\forall (a, b) \in A \times B$, $\langle a|b \rangle = 0$.

Remarque :

En particulier, $\{0\}$ est orthogonal à tout ensemble non vide.

Exemple 3.7 :

Si $A = \text{Vect}(1, 1, 0)$ et $B = \text{Vect}((1, -1, 0), (0, 0, 1))$, alors $A \perp B$.

Remarque :

Bien entendu, cette définition a un sens aussi si A et B sont des sev de E . Des sev sont des sous-ensembles particuliers.

Proposition 3.13 (Intersections de parties orthogonales) :

Soit E un espace préhilbertien réel, $A, B \subset E$ non vides orthogonales.

Alors $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cap B = \{0\}$.

Démonstration :

Supposons $A \cap B \neq \emptyset$. Soit $x \in A \cap B$. Par définition de $A \perp B$, tous les éléments de A sont orthogonaux à tous les éléments de B . Donc en particulier, x est orthogonal à lui même, donc $\|x\|^2 = \langle x|x \rangle = 0$ et donc $x = 0$. $\square$

Remarque :

En particulier, si F et G sont des sev orthogonaux de E , alors $F \cap G = \{0\}$ car $F \cap G \neq \emptyset$.

Corollaire 3.14 (Intersection de sev orthogonaux) :

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F, G deux sev de E .

Si F et G sont orthogonaux, alors F et G sont en sommes directes.

Démonstration :

C'est évident avec la proposition précédente puisque l'intersection n'est pas vide. $\square$

Exemple 3.8 :

$A = \text{Vect}(0, 0, 1)$ et $B = (0, 1, 0) + \text{Vect}(1, 0, 0)$ sont orthogonales et d'intersection vide.

Définition 3.9 (Orthogonal d'une partie) :

Soit E un espace préhilbertien réel, $A \subset E$ une partie non vide.

On définit l'orthogonal de A , noté $A^\perp$, comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A , i.e.

$$A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, \langle x|a \rangle = 0\}$$

Remarque :

C'est évident, inutile d'en faire une propriété, mais $A \perp A^\perp$. C'est le but ...

Exemple 3.9 :

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \tilde{P}(1) = 0\}$. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ de son produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt$.

Déterminer $F^\perp$.

Proposition 3.15 (Caractérisation de l'orthogonal d'une partie) :

Soit E un espace préhilbertien, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Alors $A^\perp$ est l'unique sous-ensemble de E vérifiant

$$\begin{cases} A \perp A^\perp \\ \forall X \subset E, X \perp A \implies X \subset A^\perp \end{cases}$$

Et de plus,

$$A^\perp = \bigcup_{\substack{X \subset E \\ X \perp A}} X$$

Autrement dit, $A^\perp$ est la plus grande partie de E pour l'inclusion orthogonale à A .

Démonstration :

Tout d'abord, notons que si $X \subset E$ avec $X \perp A$, alors, par définition, $X \subset A^\perp$. Supposons maintenant qu'il existe $B \perp A$ tel que $\forall X \subset E$, si $X \perp A$, alors $X \subset B$. Or $A^\perp \perp A$, donc $A^\perp \subset B$. De même, $B \perp A$, donc par définition de $A^\perp$, $B \subset A^\perp$. D'où l'unicité.

De plus, $A^\perp \in \{X \subset E, X \perp A\}$, donc $A^\perp \subset \bigcup_{\substack{X \subset E \\ X \perp A}} X$. Et d'après ce qui précède, $\bigcup_{\substack{X \subset E \\ X \perp A}} X \subset A^\perp$. D'où l'égalité. $\square$

Proposition 3.16 (Parties orthogonales et inclusion) :

Soit E préhilbertien réel, $A, B \subset E$ non vides.

Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Démonstration :

C'est assez évident : $B^\perp = \{x \in E, \forall b \in B, \langle x|b \rangle = 0\}$. Or $A \subset B$. Donc $x \in B^\perp$, en particulier, $\forall a \in A \subset B$, $\langle x|a \rangle = 0$. Donc, par définition, $x \in A^\perp$. Et donc $B^\perp \subset A^\perp$. $\square$

Proposition 3.17 (Structure de l'orthogonal d'une partie) :

Soit E préhilbertien réel, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Alors $A^\perp$ est un sev de E . Et de plus, $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

Démonstration :

Tout d'abord, clairement, $0 \in A^\perp$. De plus, par bilinéarité du produit scalaire, $A^\perp$ est stable par la LCE et la LCI. Donc $A^\perp$ est un sev de E .

Ensuite, on a $A \subset \text{Vect}(A)$, donc $\text{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$. De plus, si $x \in A^\perp$, alors, par bilinéarité du produit scalaire, x est orthogonal à toutes combinaisons linéaires d'éléments de A , i.e. $x \in \text{Vect}(A)^\perp$. $\square$

Remarque :

En particulier, si $F = \text{Vect}(A)$, alors $F^\perp = A^\perp$. Donc si F a une base $\mathcal{B}$, alors $x \in F^\perp$ si et seulement si x est orthogonal à tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ de F .

Proposition 3.18 (Orthogonaux de références) :

Soit E un espace préhilbertien réel. Alors

$$E^\perp = \{0\} \quad \text{et} \quad \{0\}^\perp = E.$$

Démonstration :

Si $x \in E^\perp$, alors $x \perp x$ et donc $x = 0$. $\square$

Remarque :

Donc le seul vecteur orthogonal à tous les autres vecteurs est le vecteur nul. Il n'y en a pas d'autres. Et c'est très pratique.

Exemple 3.10 :

Soit E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E .

Proposition 3.19 (L'“orthogonalisation” est presque une involution) :

Soit E un espace préhilbertien et $A \subset E$ un sous-ensemble. Alors

$$\text{Vect}(A) \subset (A^\perp)^\perp$$

En particulier, si F est un sev de E , $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Démonstration :

Par définition, $(A^\perp)^\perp = \{x \in E, \forall b \in A^\perp, \langle x|b \rangle = 0\}$. Or $\forall b \in A^\perp, \forall a \in A, \langle a|b \rangle = 0$. Donc, par définition, $A \subset (A^\perp)^\perp$. $\square$

Théorème 3.20 (Supplémentaires orthogonaux) :

Soit E un espace préhilbertien réel, soit F un sev de dimension finie de E .

Alors $F^\perp$ est l'unique sev de E orthogonal à F et supplémentaire à F dans E , i.e.

$$\exists ! G \text{ sev } E, \begin{cases} E = F \oplus G \\ F \perp G \end{cases}$$

En particulier, $E = F \oplus F^\perp$.

De plus,

$$F = (F^\perp)^\perp$$

Remarque :

$F^\perp$ est donc appelé supplémentaire orthogonal de F .

Démonstration :

Si $F = \{0\}$, alors $F^\perp = E$ et donc ça marche. De même, si $F = E$, ça marche encore.

Supposons $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. On a déjà $F \cap F^\perp = \{0\}$. Il reste à montrer que la somme recouvre E en entier. Mais F est de dimension finie p par hypothèse. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une BON de F . Soit $x \in E$. On pose $x_F = \sum_{k=1}^p \langle x|e_k \rangle e_k \in F$. Alors, bien sur $x = x_F + (x - x_F)$. Mais $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \langle x - x_F|e_k \rangle = \langle x|e_k \rangle - \langle x_F|e_k \rangle = 0$. Donc $x - x_F \in F^\perp$ par définition. Et donc $x \in F + F^\perp$.

Supposons qu'il existe G sev de E supplémentaire à F et orthogonal à F . Alors par définition, $G \subset F^\perp$ (aussi car $F^\perp$ est le plus grand sev orthogonal à F). Inversement, si $x \in F^\perp$, alors, par supplémentarité de F et G , $\exists (f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$. Alors $0 = \langle x|f \rangle = \|f\|^2 + \langle f|g \rangle = \|f\|^2$. Donc $f = 0$. Donc $x = g \in G$. Donc $F^\perp \subset G$. Et d'où l'unicité.

Enfin, d'après ce qu'on vient de voir $(F^\perp)^\perp$ est l'unique sev de E orthogonal et supplémentaire à $F^\perp$. Or F remplit ces conditions. Donc $F = (F^\perp)^\perp$. $\square$

Exemple 3.11 :

Soit E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E .



C'est faux si F n'est pas de dimension finie ! C'est la source de beaucoup d'erreurs dans des exercices.

Contre-exemple :

Si on considère, dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ le sous-espace $F = \{\tilde{P}, P \in \mathbb{R}[X]\}$ avec le produit scalaire usuel $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, alors on peut montrer que $F^\perp = \{0\}$ en utilisant le théorème de Weierstrass d'approximation uniforme des fonctions continues par des polynômes. Donc $(F^\perp)^\perp = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et donc $F \subsetneq (F^\perp)^\perp$.

Remarque :

Il n'y a pas de notations officielles pour les supplémentaires orthogonaux. Mais il serait pratique d'avoir un symbole supplémentaire pour spécifier que la supplémentarité est orthogonale, à l'instar des réunions disjointes ou des sommes directes. La notation $F \overset{\perp}{\oplus} G$ a l'avantage d'être suffisamment explicite pour ne pas nécessiter d'explications. Je l'utiliserai donc des fois. Attention tout de même, elle n'est pas canonique et pourrait vous être reprochée. Il est bon de savoir justifier les choses sans cette notation (la gymnastique linguistique que ça demande est un bon entraînement).

Proposition 3.21 (Orthogonalité et sommes de sev) :

Soit E un espace préhilbertien réel, F et G deux sev de E . Alors

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

De plus, si E est euclidien, alors $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Démonstration :

On a $F \subset F + G$, donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp$. De même, $(F + G)^\perp \subset G^\perp$. Et donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Et l'autre inclusion est évidente par bilinéarité du produit scalaire.

On a $F \cap G \subset F$, donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Et de même, $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Par structure d'ev, on en déduit $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

Dans le cas où E est euclidien, alors tous les sev sont de dimensions finies. Donc en appliquant le premier point à $F^\perp$ et $G^\perp$, alors $F \cap G = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = (F^\perp + G^\perp)^\perp$. Puis, en passant à l'orthogonal, on a $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$. $\square$

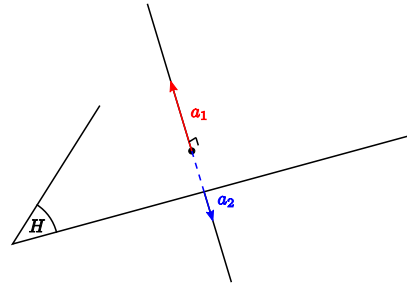
Contre-exemple :

Si on se place dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et si $G = \{t \mapsto \tilde{P}(t) \sin(t), P \in \mathbb{R}[X]\}$, alors $G^\perp = \{0\}$ pour les mêmes raisons et $F \cap G = \{0\}$. Donc $\{0\} = F^\perp + G^\perp \subsetneq (F \cap G)^\perp = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Exemple 3.12 :

Soit E un espace euclidien et H un hyperplan de E .

Montrer qu'il existe $\exists!(a_1, a_2) \in E^2$, $\|a_1\| = \|a_2\| = 1$, $a_1 \neq a_2$ tel que $H \oplus \text{Vect}(a_1) = H \oplus \text{Vect}(a_2) = E$.

**Exemple 3.13 :**

Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que $\forall f \in E^*$, $f \neq 0$, $\exists! a \in E$ tel que $\forall x \in E$, $f(x) = \langle a | x \rangle$.

2. En déduire que E et E^* sont isomorphes.

4 Produit mixte

Proposition 4.1 (Indépendance du déterminant par rapport à une BON directe) :

Soit E euclidien orienté et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux BON directes. Alors

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}.$$

Autrement dit, le déterminant est invariant par changement de BON directes.

Démonstration :

Soit $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\dim(E) = n$. Alors

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

□

Définition 4.1 (Produit mixte) :

Soit E euclidien orienté de dimension n . Soit $x_1, \dots, x_n \in E$.

Le *produit mixte* de $(x_1, \dots, x_n)$, noté $[x_1, \dots, x_n]$ est le déterminant de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans n'importe quelle BON directe.

Proposition 4.2 (Produit mixte) :

Soit E euclidien orienté. Alors

- (i) $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1, \dots, x_n]$ est une forme n -linéaire alternée sur E .
- (ii) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une BOND, alors $[e_1, \dots, e_n] = 1$ et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une BONI, alors $[e_1, \dots, e_n] = -1$.
- (iii) $(x_1, \dots, x_n)$ liée $\iff [x_1, \dots, x_n] = 0$
- (iv) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\forall x_1, \dots, x_n \in E$, $[u(x_1), \dots, u(x_n)] = \det(u)[x_1, \dots, x_n]$.

Démonstration :

C'est évident compte tenu des propriétés du déterminant. □

Remarque (Produit vectoriel) :

L'application $x \mapsto \langle x | \rangle$ est un isomorphisme si E est euclidien entre E et E^* . Or, si $x, y \in E$ non colinéaires et E de dimension 3, $z \mapsto [x, y, z]$ est une forme linéaire. Donc $\exists ! a \in E$ tel que $\forall z \in E$, $[x, y, z] = \langle a | z \rangle$. On appelle le vecteur a , le produit vectoriel de x et de y , noté $x \wedge y$. Attention ! Le produit vectoriel n'a de sens qu'en dimension 3 !

Cette construction a un sens pour tout $x, y \in E$ en complétant par cohérence par $x \wedge y = 0$ si x et y sont colinéaires. On a donc, $\forall x, y, z \in E$, $[x, y, z] = \langle x \wedge y | z \rangle$. D'où l'appellation de produit mixte.

Proposition 4.3 (Signification du produit mixte) :

Soit E euclidien orienté.

- (i) Si $\dim(E) = 2$, alors $[u, v]$ représente l'aire orienté du parallélogramme défini par les vecteurs u et v .
- (ii) Si $\dim(E) = 3$, alors $[u, v, w]$ représente le volume orienté du parallélépipède défini par les vecteurs u , v et w .

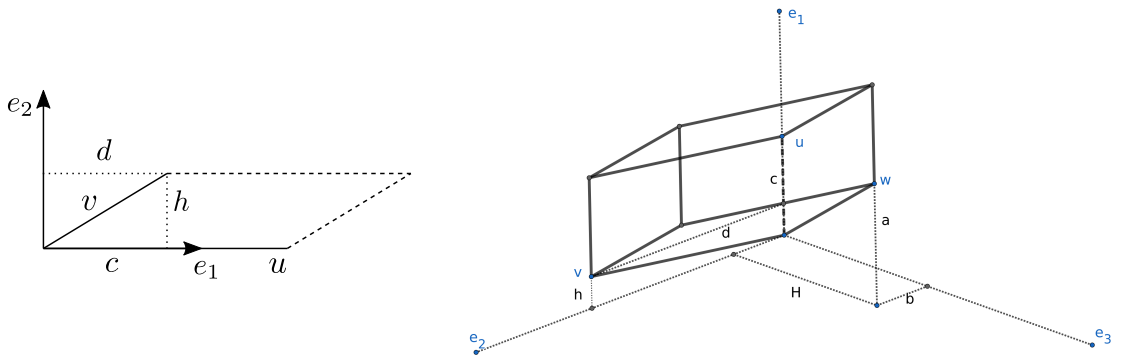
Par extension et d'une façon générale, $[u_1, \dots, u_n]$ correspond au volume orienté défini par les vecteurs $u_1, \dots, u_n$.

Démonstration :

On supposera les vecteurs non liés (sinon c'est évident).

Commençons par $\dim(E) = 2$. Alors (u, v) est une base de E . On l'orthonormalise par le procédé de Gram-Schmidt en une BON (e_1, e_2) . Alors, par Gram-Schmidt, $u = ce_1$ et $v = de_1 + he_2$ avec c un côté du parallélogramme et h la hauteur du parallélogramme. Alors $[u, v] = ch[e_1, e_2] = \pm ch$ qui correspond à l'aire orienté du parallélogramme.

Si $\dim(E) = 3$, on construit (e_1, e_2, e_3) la BON obtenu à partir de (u, v, w) par orthonormalisation de Gram-Schmidt. Alors $u = ce_1$, $v = de_1 + he_2$ et $w = ae_1 + be_2 + He_3$ où H est la hauteur et ch l'aire de la base. Alors $[u, v, w] = chH[e_1, e_2, e_3] = \pm chH$, volume orienté du parallélépipède.



□

5 Projections orthogonales

Définition 5.1 (Projection orthogonale) :

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sev de dimension finie de E .

On appelle projection orthogonal sur F la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.

On rappelle que F étant de dimension fini, $E = F \oplus F^\perp$. On peut alors définir le projecteur p_F sur F parallèlement à $F^\perp$ de sorte que si $x \in E$, alors $\exists!(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_F + x_{F^\perp}$. Alors $p_F(x) = x_F$.

Proposition 5.1 (Propriété des projections orthogonales) :

Soit E un espace préhilbertien réel, soit F un sev de dimension finie de E et soit p la projection orthogonale sur F . Alors

- (i) $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$.
- (ii) $F = \text{Im}(p) = \ker(p - \text{Id}_E)$
- (iii) $F^\perp = \ker(p) = \text{Im}(p - \text{Id}_E)$
- (iv) $\text{Im}(p) \perp \ker(p)$ et $\text{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$
- (v) $\forall x \in E, p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$

Démonstration :

Ce ne sont que des rappels sur les projecteurs dans le cas particulier d'une projection orthogonale. □

Remarque :

En particulier, $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$, par Pythagore.

Proposition 5.2 (Expression d'une projection orthogonale) :

Soit E un espace préhilbertien réel, F sev de dimension finie de E , soit $(e_1, \dots, e_p)$ une BON de F . Soit p_F la projection orthogonale sur F . Alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x | e_k \rangle e_k.$$

Démonstration :

F étant de dimension finie, il admet une BON. Il est en lui-même un espace euclidien. Et on connaît l'expression d'un vecteur relativement à une BON. $\square$

Remarque :

Dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on fait en réalité des projections orthogonales successives de chaque vecteur de la base sur l'orthogonale des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs précédents. Autrement dit, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base, les u_j orthogonaux sont les projections orthogonales de e_j sur $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1})^\perp$.

Proposition 5.3 (Cas d'une projection orthogonale sur une droite et un hyperplan) :

Soit E un espace préhilbertien réel, $a \in E$, $a \neq 0$.

- La projection orthogonale sur la droite $D = \text{Vect}(a)$ est

$$p_D : x \mapsto \frac{\langle a | x \rangle}{\|a\|^2} a.$$

- La projection orthogonale sur un hyperplan $H = \text{Vect}(a)^\perp$ est

$$p_H : x \mapsto x - \frac{\langle x | a \rangle}{\|a\|^2} a$$

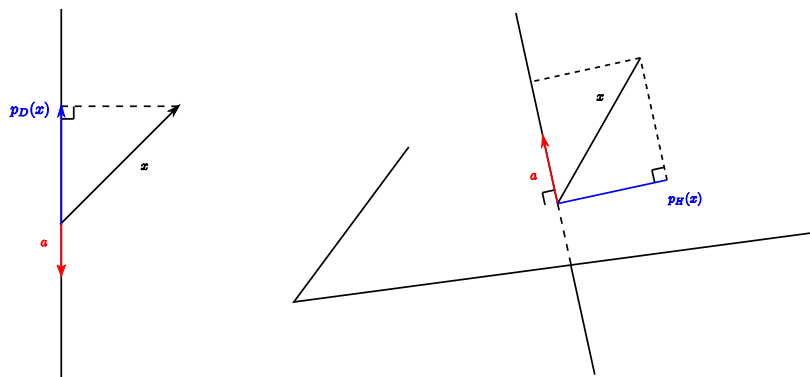
Démonstration (À refaire, à savoir retrouver) :

Il suffit de faire la projection sur la droite $D = \text{Vect}(a)$.

Si $a \neq 0$, alors $\frac{1}{\|a\|} a$ est une BON de $\text{Vect}(a)$. Donc

$$\forall x \in E, p_D(x) = \left\langle x \left| \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|} = \frac{\langle x | a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

□

**Remarque :**

Géométriquement, si A, B et C sont trois points, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AH \times AC$ où H est le projeté orthogonal de A sur (AC) . Autrement dit, $\overrightarrow{AH}$ est la projection vectorielle orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur $\text{Vect}(\overrightarrow{AC})$.

Exemple 5.1 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le plan $\mathcal{P} : x - z = 0$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer la matrice de $p_{\mathcal{P}}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 5.4 (Inégalité de Bessel) :

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sev de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F . Alors

$$\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|.$$

Démonstration :

C'est Pythagore : $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et $(p_F(x), x - p_F(x))$ est une famille orthogonale. Donc $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$. □

6 Symétries orthogonales

Définition 6.1 (Symétrie orthogonale) :

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sev de dimension finie de E .

On appelle *symétrie orthogonale par rapport à F* , notée s_F , la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

On rappelle que F étant de dimension finie, on a $E = F \oplus F^\perp$ assurant la validité de cette définition.

Définition 6.2 (Réflexion, Retournement) :

Soit E un espace préhilbertien réel.

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan s'appelle une *réflexion*.

Une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle s'appelle un *retournement*.

Proposition 6.1 (Propriété des symétries orthogonales) :

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sev de dimension finie de E . Soit s_F la symétrie orthogonale par rapport à F et p_F la projection orthogonale sur F .

- (i) $s_F^2 = \text{Id}_E$
- (ii) $\ker(s - \text{Id}_E) = F$
- (iii) $\ker(s_F + \text{Id}_E) = F^\perp$
- (iv) $s_F = 2p_F - \text{Id}_E$
- (v) $s_F = p_F - p_{F^\perp}$

Démonstration :

C'est évident. C'est une symétrie vectorielle. □

Exemple 6.1 :

On reprend le plan $\mathcal{P} : x - z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de $s_{\mathcal{P}}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 6.2 (Expression d'une réflexion) :

Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E et $a \in H^\perp$, $a \neq 0$. Alors

$$\forall x \in E, s_H(x) = x - 2 \frac{\langle x|a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

Démonstration :

On a $s_H = 2p_H - 2\text{Id}_E$ et on a l'expression de la projection orthogonale sur H . □

7 Distance à un sous-espace

On rappelle qu'on a déjà vu que si A est un sous-ensemble de E préhilbertien réel et $x \in E$, alors

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Proposition 7.1 (Distance à un sev) :

Soit E préhilbertien réel et F un sev de dimension finie de E . Soit $x \in E$.

La distance $d(x, F)$ de x à F est un minimum et elle est atteinte pour $p_F(x)$, le projeté orthogonale de x sur F . De plus,

$$\forall y \in F, d(x, F) = \|x - y\| \iff y = p_F(x)$$

Donc $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F pour lequel la distance est minimum.

De plus, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une BON de F , alors

$$d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^p \langle x|e_k \rangle^2.$$

Si $F^\perp$ est également de dimension finie et si $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une BON de $F^\perp$, alors

$$d(x, F)^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^n \langle x|e_k \rangle^2.$$

Démonstration :

Soit $y \in F$. Alors

$$x - y = \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(p_F(x) - y)}_{\in F}$$

Donc, par Pythagore, $\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$. D'où $\forall y \in F, \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$

avec égalité si et seulement si $\|p_F(x) - y\| = 0$.

De plus, toujours par Pythagore, $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$. Donc

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^p \langle x | e_k \rangle^2$$

d'après l'expression d'un vecteur dans une BON.

Et enfin,

$$d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^n \langle x - p_F(x) | e_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{p+1} \langle x | e_k \rangle^2$$

par orthogonalité et linéarité du produit scalaire. □

Exemple 7.1 :

Déterminer la distance de $P(X) = aX^2 + bX + c$ à $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire $\langle P | Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{P^{(n)}}(0) \widetilde{Q^{(n)}}(0)$.



Si F n'est pas de dimension finie, il n'y a aucune raison pour que cette distance soit atteinte. C'est peut être vraiment une borne inf.

Contre-exemple :

On considère $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et le produit canonique sur E à l'aide des intégrales. On considère $F = \{\tilde{P}, P \in \mathbb{R}[X]\}$ le sev des fonctions polynomiales. Alors $\exp \in E$ et $\exp \notin F$. Mais

$$d\left(\exp, x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $d(\exp, F) = 0$. Si la distance était atteinte, alors $\exp \in F$. ☠.

Remarque :

Le cours de deuxième année devrait (?) pousser l'étude des espaces préhilbertiens plus loin. En particulier, vous étudierez les isométries.

En particulier, les espaces préhilbertiens permettent de donner un sens à la dernière transformation matricielle qu'on a vu et qui n'a pas encore de sens vectoriel : la transposition. On peut montrer que $\forall f \in \mathcal{L}(E), \exists ! f^* \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x, y \in E, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$. f^* s'appelle l'application adjointe de f . Et la matrice représentative de f^* est la transposée de la matrice de f . Mais cette partie n'est pas (plus) dans le cadre du cours de première année.