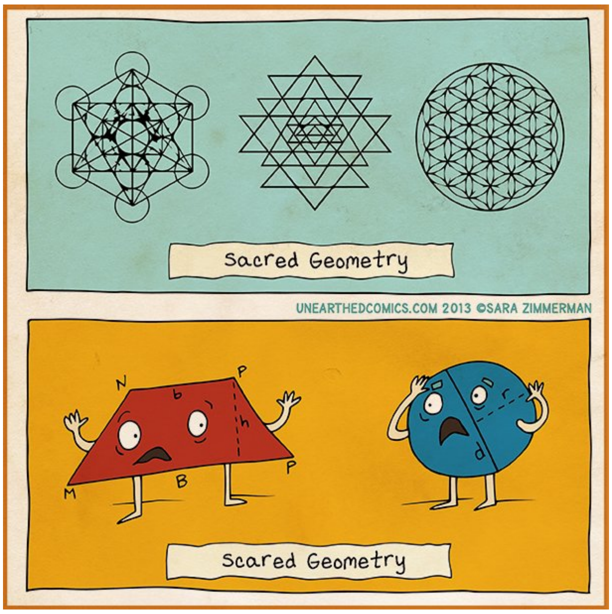
Chapitre 28
Géométrie Affine

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

27 mai 2025



Ce chapitre fait suite immédiatement au chapitre sur les systèmes linéaires. Le but est de donner un sens géométrique aux solutions d'un système linéaire, puis de travailler dans l'ensemble des solutions (et d'y faire un peu de géométrie).

La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses.

René Descartes (1596-1650)

D'après Euclide, le carré est un quadrilatère dont les quatre angles sont droits et les quatre côtés égaux. D'après Sophicléïde, le carré est un triangle qui a réussi ou une circonférence qui a mal tourné

Pierre DAC (1893-1975)

Table des matières

1 Généralités

Le but ici est de présenter la géométrie affine, qui se superpose à la géométrie vectorielle. Nous avons déjà largement définie et étudié les éléments d'un espace vectoriel. Ses éléments sont des vecteurs. On peut y faire certaines manipulations géométriques, mais les vecteurs restent des objets abstraits, ce sont des concepts, des idées, que l'on ne peut donc pas dessiner. La géométrie vectorielle est une géométrie théorique, abstraite.

Pour pouvoir dessiner, on a besoin de points. Et on sait que dans le cas du plan ou de l'espace, deux points définissent toujours un vecteurs. Autrement dit, il y a de la géométrie vectorielle sous-jacente. Et inversement, si l'on a vecteur, on peut le représenter en l'attachant à un point.

Il va y avoir deux façons de regarder les choses désormais, qui vont se superposer. Mais selon "le filtre" de lecture que nous mettrons, nous ne pourront pas faire les même opérations. Un point n'est pas un vecteur et donc, ne se manipule pas de la même manière. Et inversement.

Le principe général est que la géométrie affine correspond à la géométrie vectorielle mais attaché à un point. On définit un point de repère quelque part auquel on attache le centre d'en espace vectoriel. Il y a donc toujours une forme de dualité. En considérant un point, on peut avoir un point effectivement dont on ne peut pas faire grande chose. Mais comme on dispose d'un autre point déjà (le centre du repère), on définit automatiquement un vecteur. Et inversement, si l'on se munit d'un vecteur, on peut le représenter facilement à partir du centre du repère, ce qui donne naissance à un nouveau point.

D'autre part, à partir de deux points quelconque d'un espace affine, on définira automatiquement un unique vecteur. En revanche, un vecteur ne peut pas définir de points de l'espace affine car il faudrait choisir au moins un point arbitrairement pour pouvoir dessiner un représentant du vecteur. Un vecteur seul est objet abstrait et ne peux se dessiner.

D'une façon un peu plus détaillé :

- Tout couple de points (A, B) permet de définir un unique vecteur $\overrightarrow{AB}$
- Si un point A est fixé, tout vecteur $\vec{v}$ définit de manière unique un point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$
- Pour tous points A, B, C, on a la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

Autrement dit, l'application $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ est une bijection de $\mathcal{E}^2$ dans $\vec{E}$ et si A est fixé, alors $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\vec{E}$.

1.1 Translations d'un espace vectoriel

Définition 1.1 (Translations) :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E$.
On appelle *translation de vecteur* u l'application

$$t_u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x+u \end{array}$$

On note $\mathcal{T}(E)$ l'ensemble des translations de E.

Remarque :
On rappelle qu'une translations n'est jamais (sauf si $u = 0$) une application linéaire ! On est bien à valeur dans E, l'opération effectuée ne détruit pas la structure d'espace vectoriel, mais la translation n'est pas compatible avec cette structure. Elle "décale" les objets. Le 0 du départ n'est pas le 0 d'arrivée. C'est un déplacement.

Proposition 1.1 (Propriétés des translations) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $u, v \in E$. Alors

(i) $t_u \circ t_v = t_{u+v} = t_v \circ t_u$

(ii) t_u est bijective et $t_u^{-1} = t_{-u}$

(iii) $(\mathcal{T}(E), \circ)$ est un groupe (c'est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$).

Démonstration :
C'est assez évident. □

Définition 1.2 (Sous-espaces affines d'un ev, Dimension d'un espace affine) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
On appelle *sous-espace affine de* E toute partie $\mathcal{F} \subset E$ qui est l'image par une translation d'une sev de E, *i.e.* tel que $\exists x_0 \in E$ et F un sev de E tels que

$$\mathcal{F} = x_0 + F = \{x_0 + y,\ y \in F\}.$$

F s'appelle la direction de $\mathcal{F}$. Par définition, la dimension de $\mathcal{F}$ est la dimension de F. Les vecteurs de F sont appelés vecteurs directeurs de $\mathcal{F}$.

Notation :
Usuellement, les espaces affines sont notés avec des lettres cursives et les espaces vectoriels avec des lettres droites. Les points sont notés avec des majuscules droites et les vecteurs des minuscules. Pour insister, on peut rajouter des flèches sur les objets vectoriels. Donc :

$$\mathcal{F} = A + \vec{F} = \{A + \vec{v},\ \vec{v} \in \vec{F}\}.$$

Quoi qu'il en soit, ce qui fait toujours autorité est la manière dont on définie les objets et pas vraiment leurs notations.

J'alternerais un peu entre les différentes notations pour essayer de s'y habituer.
Plus rarement, on peut voir noté $\mathcal{F}$ un espace affine et $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ sa direction.

⚠ En particulier, comme E est un sev de lui même, on peut voir tout espace vectoriel comme un espace affine. Il est alors le translaté de lui même. On a, en quelques sortes, "déplacé" l'origine.

Il ne faut donc pas confondre ce qui relève de l'algèbre linéaire de ce qui relève de la théorie des ensembles et qui donne naissance à un décalage de l'algèbre linéaire (la détruisant ce faisant).

Définition 1.3 (Droite affine, plan affine, hyperplan affine) :
Soit E un $\mathbb{K}$ ev, $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction $\vec{F}$. Alors

- Si $\vec{F}$ est une droite vectorielle, alors on dit que $\mathcal{F}$ est *une droite affine*.
- Si $\vec{F}$ est un plan vectoriel, alors on dit que $\mathcal{F}$ est *un plan affine*.
- Si $\vec{F}$ est un hyperplan, alors on dit que $\mathcal{F}$ est *un hyperplan affine*.

Proposition 1.2 :
Un sous-espace affine n'est jamais vide.

Démonstration :
Obligatoirement puisque sa direction ne l'est pas et qu'une translation est une bijection. □

Définition 1.4 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E.

On définit la différence de deux points comme étant l'unique vecteur définit par ces deux points, *i.e.* si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $B - A \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{AB}$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il n'y a pas d'opérations dans un espace affines ! Les choses sont décalés, il n'y a donc plus d'éléments neutres a priori. On a perdu la structure d'espace vectoriel. Et de ce fait, la somme de deux points n'a pas de sens. La différence encore moins.

Mais, pour garder une cohérence avec la définition d'un sous-espace affine et par soucis de commodité pour les manipulations ultérieurs, on s'autorise une notation qui rappelle une opération mais qui n'en est pas une !

Autrement dit, si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $\exists u, v \in F$ tels que $A = x_0 + u$ et $B = x_0 + v$, donc, vectoriellement, $B - A = v - u \in F$.

Remarque :
On retrouver ainsi $A + \overrightarrow{AB} = B$ dans $\mathcal{F}$.

On ne peut pas faire de sommes de points, mais on additionner un point et un vecteurs, ce qui correspond à faire un translation. En résumer, pour les opérations autorisées :

- On peut ajouter deux vecteurs. On obtient un vecteur. On est en géométrie vectorielle. MAIS on ne peut pas ajouter deux points.
- Ajouter un point à un vecteur. On obtient un point.
- Retrancher deux points. On obtient un vecteur (de la direction).

Proposition 1.3 (Caractérisation des points affines) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F un sev, $x_0 \in E$ et $\mathcal{F} = x_0 + F$ et $A \in \mathcal{F}$. Alors :

- [Notations vectorielles] $x \in \mathcal{F} \iff x - x_0 \in F$
- [Notations affines] $B \in \mathcal{F} \iff B - A = \overrightarrow{AB} \in F$.

Proposition 1.4 (Direction d'un espace affine) :
Soit E un $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E et $A \in \mathcal{F}$. Alors

$$\vec{F} = \{\overrightarrow{AB} = B - A,\ B \in \mathcal{F}\} = \{\overrightarrow{BC} = C - B,\ B, C \in \mathcal{F}\}$$

est la direction de $\mathcal{F}$ et est unique.

Avec les notations vectorielles :

$$\vec{F} = \{x - x_0,\ x \in \mathcal{F}\} = \{x - x',\ x, x' \in \mathcal{F}\}.$$

Démonstration :
Si $\vec{v} \in \vec{F}$, on pose $B = A + \vec{v} \in \mathcal{F}$, et dans ce cas, $\overrightarrow{AB} = B - A = \vec{v}$. L'autre inclusion est évidente par définition.

On procède de la même manière pour l'autre écriture : si $B, C \in \mathcal{F}$, alors par définition de $\mathcal{F}$, $\exists \vec{u}, \vec{v} \in F$ tels que $B = A + \vec{u}$ et $C = A + \vec{v}$. Alors $B - C = \vec{u} - \vec{v} \in \vec{F}$. Et la réciproque est facile.

On procède de la même manière avec les notations vectorielles. $\square$

Remarque :
Pour un espace affine, sa direction est unique. En revanche, elle peut être définie par n'importe quel point, *i.e.*

$$\forall A \in \mathcal{F},\ F = \{\overrightarrow{AM},\ M \in \mathcal{F}\}$$

Exemple 1.1 :

1. Montrer qu'un points quelconque d'un espace vectoriel (vu comme espace affine) est un sous-espace affine.
2. Montrer que $\mathcal{D} : 2x + 3y = 5$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ dont on déterminera la direction.
3. Montrer que $\mathcal{P} : 2x + 3y + z = 6$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la direction.
4. Montrer que

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

est une droite affine de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.5 (Intersection d'espaces affines) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de direction $\vec{F}$ et $\vec{G}$ respectivement.

Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est soit vide, soit un espace affine de direction $\vec{F} \cap \vec{G}$. Et dans ce dernier cas, on dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont concourants.

Démonstration :
Supposons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors $\mathcal{F} = A + \vec{F}$ et $\mathcal{G} = A + \vec{G}$. Alors

$$M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{F} \cap \vec{G}$$

Or $\vec{F} \cap \vec{G}$ est sev de E, donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $\vec{F} \cap \vec{G}$. $\square$

Exemple 1.2 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sea de directions respectives $\vec{F}$ et $\vec{G}$.

Montrer que si $E = F + G$, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont sécants.

Définition 1.5 (Espaces affines parallèles) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de direction respectives $\vec{F}$ et $\vec{G}$.

Si $\vec{F} \subset \vec{G}$, alors on dit que $\mathcal{F}$ *est parallèle à* $\mathcal{G}$. On pourra noter $\mathcal{F} \mathbin{/\!/} \mathcal{G}$

Exemple 1.3 :
Une droite peut être parallèle à un plan, mais pas le contraire !

1.2 Solutions des problèmes linéaires

Proposition 1.6 (Solution d'un problème linéaire) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système linéaire $u(x) = b$. Alors :

- Si $b \notin \mathrm{Im}(u)$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$
- Si $b \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de E de direction $\ker(u)$. Plus précisément, $\mathcal{S} = x_0 + \ker(u)$, où x_0 est une solution particulière du système.

Démonstration :
Évident en reprenant le cours sur les systèmes linéaires :

$$x \in \mathcal{S} \iff u(x) = b = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \ker(u) \iff x \in x_0 + \ker(u).$$

□

Exemple 1.4 :

1. Les solutions d'une équation différentielle linéaire est un espace affine
2. L'ensemble des suites arithmético-géométrique avec une raison arithmétique et géométrique fixées est un espace affine.
3. Les solutions d'un système linéaire est un espace affine
4. Les polynômes interpolateurs de Lagrange : si on note $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par $u(P) = (\widetilde{P}(a_0), \dots, \widetilde{P}(a_n))$, et si $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, alors l'ensemble des polynômes P tels que $u(P) = (x_0, \dots, x_n)$ est un espace affines de $\mathbb{K}[X]$.

1.3 Repères affines, Coordonnées

Définition 1.6 (Repère cartésien) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction $\vec{F}$.
On appelle *repère cartésien de* $\mathcal{F}$, tout couple $(O, \mathcal{B})$ où $O \in \mathcal{F}$ est l'origine du repère et $\mathcal{B}$ est une base de la direction $\vec{F}$.

Remarque :
Un repère cartésien n'est donc, a priori, par orthonormé. Ni même orthogonal. Il est usuel, une fois muni d'un produit scalaire, de choisir une base orthonormé (par le procédé d'orthonormalisation de Graam-Schmidt, par exemple), pour des raisons de praticité. Mais ce n'est pas nécessaire pour avoir un repère cartésien.

Définition 1.7 (Coordonnées dans un espace affine) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de direction $\vec{F}$ muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, avec $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$.

Alors, $\forall M \in \mathcal{F}$, $\exists!(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\overrightarrow{OM} = \sum_{k=1}^{p} x_k \vec{e_k}$. Donc $M = O + \sum_{k=1}^{p} x_k \vec{e_k}$.
Les scalaires $x_1, \ldots, x_p$ sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Remarque :
Autrement dit, les coordonnées d'un point d'un espace affine, correspond aux coordonnées du vecteurs que ce point définit à partir du point de repère de $\mathcal{F}$, dans une base choisie de la direction de $\mathcal{F}$.

Donc, dans un espace vectoriel, les coordonnées d'un vecteurs est soumis au choix d'une base. Dans un espace affine, les coordonnées d'un point est soumis au choix d'une base de la direction de l'espace ET au choix d'un point de repère de l'espace affine. Un point aura donc des coordonnées différentes en changeant de base pour la direction ou en changeant de point de repère. Ou les deux.

Il faudra donc toujours gardé à l'esprit ces dépendances et faire en sortes que les choix soit explicites pour pouvoir donner du sens aux coordonnées.

1.4 Orientations de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.8 (Orientation) :
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent la même orientation si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

Remarque :
L'orientation n'a pas pour les $\mathbb{C}$-ev. Ça n'a de sens que pour les $\mathbb{R}$-ev : il faut un signe.

Proposition 1.7 (Orientations) :
Il n'y a que deux orientations possibles.

Démonstration :
La relation de même orientation sur les bases est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ qui n'a que deux classes d'équivalences.

Autrement dit, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ et donc il n'y a que deux cas possibles : soit elles ont la même orientations, soit non. $\square$

Définition 1.9 (Base directe, indirecte de $\mathbb{R}^n$) :
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $\mathcal{B}$ est *une base directe* de $\mathbb{R}^n$, si $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) > 0$.
On dit que $\mathcal{B}$ est *une base indirecte* de $\mathbb{R}^n$ si $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) < 0$.

Définition 1.10 (Espace orienté) :
Orienter $\mathbb{R}^n$ c'est munir $\mathbb{R}^n$ d'une base directe ou indirecte. L'orientation choisie et alors la même pour toute base directe (orientation directe) et pour toute base indirecte (orientation indirecte).

Remarque (Cas de $\mathbb{R}^3$: règle de la main droite) :
Dans $\mathbb{R}^3$, choisir une base directe revient à choisir une base pour laquelle, les trois vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, dans cet ordre, peuvent être placé sur le pouce, l'index et le majeur de la main droite (dans cet ordre). S'ils correspondent aux doigts de la main gauche, la base est indirecte.

$\vec{\imath}$	$\rightsquigarrow$	Pouce		Main droite	$\rightsquigarrow$	Base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ direct
$\vec{\jmath}$	$\rightsquigarrow$	Index				
$\vec{k}$	$\rightsquigarrow$	Majeur		Main gauche	$\rightsquigarrow$	Base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ indirect

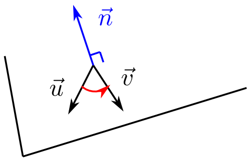
Exemple 1.5 :
La base canonique de $\mathbb{R}^3$ vérifie la règle de la main droite et donc donne toujours un repère direct.

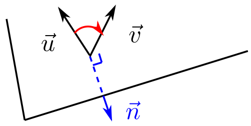
Remarque :
Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ définit une certaine orientation, alors $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, -\vec{k})$ définit l'orientation opposé.

Définition 1.11 (Orientation d'un plan de l'espace) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orienté de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$.
Orienté $\mathcal{P}$ c'est choisir deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$ tel que la base $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ définisse la même orientation de l'espace.

Remarque :
Donc orienté un plan dans l'espace, c'est simplement faire le choix d'un sens pour un vecteur normal. Ils ont tous la même direction. Mais une fois un sens choisi, ça détermine l'ordre dans lequel on doit choisir deux vecteurs directeurs quelconques du plan et donc une orientation de l'espace.

Il suffit d'utiliser la règle de la main droite pour ça : Si $\vec{n}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est et $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{n})$ définissent des orientations différents de l'espace. Les deux cas correspondent aux deux orientations possible de $\mathcal{P}$. Et donc, une fois un vecteur $\vec{n}$ choisi, il n'y a qu'une orientation possible de $\mathcal{P}$ qui est correspond à une orientation choisi de l'espace.





Remarque :
Inversement, si on a une orientation d'un plan de l'espace, on peut étendre cette orientation à l'espace entier en choisissant un vecteur normal au plan.

Définition 1.12 (Axe orienté) :
On appelle axe orienté de l'espace toute droite munie d'une orientation, c'est à dire la donnée $(\mathcal{D}, \vec{u})$ où $\mathcal{D}$ est une droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Remarque :
Orienter un axe permet également d'orienter les plans perpendiculaires à cet axe.

1.5 Hyperplan affines d'un espace euclidien

Proposition 1.8 (Caractérisation des hyperplans affines) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{H}$ un espace affine de E. Soit O un point de E.

$\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de E si, et seulement si, $\exists(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que si M est un point de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $(O, \mathcal{B})$, alors $M \in \mathcal{H} \iff \sum_{k=1}^n a_k x_k = b$.

Démonstration :
Soit $\vec{H}$ la direction de $\mathcal{H}$. Alors, $\exists(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{H}$ soit représenté par l'équation $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$ dans $\mathcal{B}$.

Soit $M_0 \in \mathcal{H}$ de coordonnées $M_0(y_1, \dots, y_n)$ dans $(O, \mathcal{B})$ et soit M un point de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $(O, \mathcal{B})$. Alors

$$M \in \mathcal{H} \iff \overrightarrow{M_0 M} \in \vec{H} \iff \sum_{k=1}^n a_k(x_k - y_k) = 0 \iff \sum_{k=1}^n a_k x_k = b$$

avec $b = \sum_{k=1}^n a_k y_k \in \mathbb{K}$. □

Remarque :
On a déjà vu que tout sev de dimension p peut s'exprimer comme l'intersection de $n-p$ hyperplans, un espace affine de dimension p peut donc être décrit par $n-p$ équations affines. cf systèmes linéaires.

Définition 1.13 (Vecteur normal à espace affine) :
Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien, $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction $\vec{F}$.
On appelle vecteur normal à $\mathcal{F}$, tout vecteur $\vec{n} \in \vec{F}^{\perp} \setminus \{0\}$.

Remarque :
En particulier, tous les vecteurs normaux à un hyperplans affines sont colinéaires.

Proposition 1.9 (Caractérisation des hyperplan par les vecteurs normaux) :
Soit E un espace euclidien, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de direction $\vec{H}$. Soit $A \in \mathcal{H}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Soit M un point de E. Alors

$$M \in \mathcal{H} \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}.$$

Démonstration :
$M \in \mathcal{H} \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{H} = \mathrm{Vect}(\vec{n})^{\perp} \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}.$ □

Corollaire 1.10 (Caractérisation des vecteurs normaux à un hyperplan affine) :
Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E, $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un RON de E et $\vec{n}$ un vecteur de coordonnées $(a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E.
$\vec{n}$ est normal à $\mathcal{H}$ si, et seulement si, $\exists b \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{H}$ est d'équation $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = b$ dans $\mathcal{R}$.

Démonstration :
Soit $A \in \mathcal{H}$. Alors $\vec{n} \perp \mathcal{H} \iff \forall M \in \mathcal{H},\ \overrightarrow{AM} \in \vec{\mathcal{H}} = \vec{n}^{\perp} \iff \forall M \in \mathcal{H},\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ □

Remarque :

- Si on munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique, alors $ax + by = c$ représente une droite affine dans le RON canonique si et seulement si $(a, b) \neq 0$ et dans ce cas là $\vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à la droite.
- Si on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique, alors $ax + by + cz = d$ représente un plan affine dans le RON canonique si et seulement si $(a, b, c) \neq 0$ et dans ce cas, $\vec{n} = (a, b, c)$ est un vecteur normal au plan.

Définition-Propriété 1.14 (Distance d'un point à un espace affine) :
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E. Soit M un point de E.

On définit la distance de M à $\mathcal{F}$, notée $d(M,\mathcal{F})$, comme la plus petite distance de M à un point de $\mathcal{F}$, *i.e.*

$$d(M,\mathcal{F}) = \inf_{A\in\mathcal{F}} \|\overrightarrow{AM}\|.$$

Démonstration :
Si $C \in \mathcal{F}$ est un point fixé de $\mathcal{F}$, alors par la relation de Chasles, $\forall A \in \mathcal{F}$, $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\|$ et $\overrightarrow{AC} \in \vec{F}$. Donc

$$d(\overrightarrow{CM},\vec{F}) = \inf_{u\in\vec{F}} \|\overrightarrow{CM} - \vec{u}\| = \inf_{A\in\mathcal{F}} \|\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{AC}\| = \inf_{A\in\mathcal{F}} \|\overrightarrow{AM}\|$$

donc $d(M,\mathcal{F})$ existe et en fait, $d(M,\mathcal{F}) = d(\overrightarrow{CM},\vec{F})$. □

Proposition 1.11 (Distance d'un point à un espace affine) :
Soit E un espace euclidien, $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de direction $\vec{F}$, $A \in \mathcal{F}$ et M un point de E. Alors

$$d(M,\mathcal{F}) = d(\overrightarrow{AM},\vec{F}).$$

Démonstration :
Voir au dessus. □

Proposition 1.12 (Distance d'un point à un hyperplan affine) :
Soit E un espace euclidien, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, $A \in \mathcal{H}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$ et $\sum_{k=1}^n a_k x_k = b$ une équation de $\mathcal{H}$ dans dans un RON $\mathcal{R}$ de E.

Soit M un point de E de coordonnées $(y_1,\dots,y_n)$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$d(M,\mathcal{H}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\sum_{k=1}^n a_k y_k - b|}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}}$$

Démonstration :
On note $\mathcal{H} = A + \vec{H}$. Alors

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{H}) &= \inf_{B \in \mathcal{H}} \|\overrightarrow{BM}\| \\ &= d(\overrightarrow{AM}, \vec{H}) \\ &= \|p_{\vec{H}^\perp}(\overrightarrow{AM})\| \\ &= \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \end{aligned}$$

Si de plus $\vec{n}$ est de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans un base BON $\mathcal{B}$ et si A est de coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ dans un RON établi à partir de $\mathcal{B}$, alors

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \sum_{k=1}^{n} a_k(x_k - y_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k - b.$$

□

Remarque :
Dans le cas d'un plan en dimension 3, on dispose d'une expression supplémentaire en utilisant le produit vectoriel :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

où $A \in \mathcal{P}$, $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan directeur de $\mathcal{P}$.

De même, dans le cas d'une droite en dimension 2, on peut utiliser le déterminant.

Exemple 1.6 :
Déterminer les équations des bissectrices, dans un RON du plan, des droites $\mathcal{D} : 3x + 4y = 7$ et $\mathcal{D} : 5x - 12y = -7$.

Proposition 1.13 (Lignes de niveau d'un produit scalaire) :
Soit E un espace euclidien, $\vec{n} \in \mathbb{E}$ un vecteur non nul et A un point de E.

Les lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$, c'est-à-dire les ensembles $\mathcal{H}_\lambda = \{M \in E,\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \lambda\}$, sont des hyperplans affines de vecteurs normal $\vec{n}$.

Démonstration :
Soit $M \in E$ un point. Alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de E. Or $E = \mathrm{Vect}(\vec{n}) \oplus \mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp$. Donc $\exists!(\alpha, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times \mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{n} + \vec{u}$. Alors

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \alpha\|\vec{n}\|^2.$$

Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\lambda \iff \alpha = \frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2}$. Et donc $\overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} + \vec{u}$. On pose $B_\lambda = A + \frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$ le translaté de A par le vecteur $\frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$. Alors $M = \left(A + \frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\right) + \vec{u} = B_\lambda + \vec{u} \in B_\lambda + \mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp$.

Inversement, si $M \in B_\lambda + \mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp$, alors $\exists \vec{u} \in \mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp$ tel que $M = A + \frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} + \vec{u}$ et donc $\overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} + \vec{u}$ d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \lambda$.

D'où

$$\mathcal{H}_\lambda = \{M \in E,\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \lambda\} = B_\lambda + \mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp$$

et donc $\mathcal{H}_\lambda$ est un hyperplan de direction $\mathrm{Vect}(\vec{n})^\perp$ de vecteur normal $\vec{n}$. $\square$

2 Cas de $\mathbb{R}^2$

Dans le livre *"Les éléments"*, Euclide pose les bases de la géométrie. C'est dans cet ouvrage monumental qu'Euclide énonce les 5 postulats à partir desquels il construits l'ensemble de la géométrie euclidienne que vous avez déjà vu au collège. Ce sont 5 propositions que l'on ne peut prouver et qui sont considérées comme vraies. Ces 5 postulats sont :

I. Par deux points distincts passe une unique droite.
II. Tout segment est prolongeable en une droite.
III. Par deux points distincts, il existe un unique cercle passant par l'un des points et de centre le second point.
IV. Tous les angles droits sont égaux entre eux (sans orientation). 6
V. Par un point extérieur à une droite, il passe une droite unique parallèle à la droite donnée.

Le plus célèbre étant le 5ème postulat.

La géométrie basée sur ces 5 postulats est appelée géométrie euclidienne. Et c'est celle que l'on va étudier. On se contentera cette année de la géométrie euclidienne plane dans ce chapitre et la géométrie de l'espace dans le chapitre prochain. Vous verrez la généralisation de ces deux chapitres l'année prochaine dans le chapitre sur les espaces euclidiens.

Remarque :
Il existe des systèmes géométriques sans ces postulats (avec aucun ou seulement certains). On appelle ces géométries des géométries non euclidienne. C'est celle notamment de la géométrie sphérique pour laquelle il n'existe aucune parallèle à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite. C'est la négation du 5ème postulat d'Euclide. Il existe beaucoup d'autres géométrie non euclidienne. À chaque fois que l'on nie l'un des postulats d'Euclide, on donne naissance à une nouvelle géométrie non euclidienne. D'autres exemples célèbres ont été fournis par Poincaré dans lesquelles il existe une infinité de droite parallèles à une autre passant par un point donné (c'est la géométrie hyperbolique ou celle de son monde sphérique à gradient de température non nul).

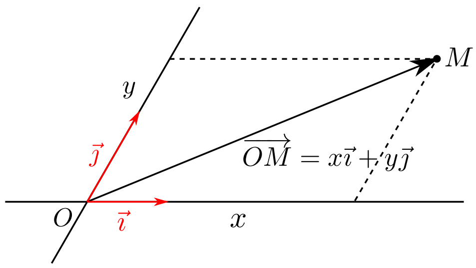
2.1 Repère cartésien

On peut raffiner les types de géométries. À l'intérieur de la géométrie euclidienne, on peut placer la géométrie cartésienne. La géométrie cartésienne est la géométrie euclidienne munie d'un repère cartésien qui permet de repérer les points avec un repère. Ce qui permet de pouvoir donner des équations des droites, faire des calculs de longueurs plus efficacement ...

Remarque :
Il y a alors une petite imprécision sur le terme "géométrie euclidienne" qui peut soit faire référence à la géométrie d'un espace euclidien (cf deuxième année, et c'est la définition propre, normalement) ; soit faire référence à la géométrie plane non cartésienne, c'est-à-dire sans repère (sur une feuille blanche, la géométrie de collège essentiellement).

Définition-Propriété 2.1 (Repère du plan, coordonnées cartésiennes) :
On appelle repère du plan[a] la donné d'un point O origine du repère et de deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$. On note alors $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le repère du plan.

Si M un point du plan, alors $\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Dans ce cas, x et y sont alors les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On notera alors $M(x, y)$ le point M avec ses coordonnées.



a. Un plan est un espace vectoriel de dimension 2. Les espaces vectoriels et les dimensions seront largement étudiés au cours de l'année.

Démonstration :
C'est évident puisque $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. À condition de savoir ce qu'est une base, évidemment... Cf chapitre 10 - Espaces Vectoriels. □

Remarque (Notations) :
Dans ce chapitre et le prochain, je tâcherais de mettre des flèches sur les objets qui sont des vecteurs pour bien distinguer leur nature de vecteurs d'autres éléments qui ne seraient pas des vecteurs. Il

est évident que c'est une très mauvaise habitude et qu'il va falloir s'affranchir de cette pratique dégradante. Dans les chapitres d'algèbres linéaires qui vont suivre, plus aucune flèche n'apparaîtra et il sera rigoureusement interdit d'en mettre. C'est moche.

!!! ATTENTION !!!

Si le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et M un point du plan, on a alors $M(x,y)$ le point avec ses coordonnées. Mais (x,y) sont aussi les coordonnées dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Ce qui veut dire $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Dans le cas où $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ correspond à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on pourra alors aussi écrire $\overrightarrow{OM} = (x,y)$.

Donc en géométrie cartésienne, on manipule des vecteurs et des points tous les deux exprimés à partir d'un couple de réels. Il ne faudra cependant pas confondre les deux. C'est le sens donné à ce couple de coordonnées qui fait toute la différence. Si c'est les coordonnées dans une base de $\mathbb{R}^2$, alors c'est un vecteur ; mais si c'est un couple dans le repère du plan, alors c'est un point. La seule façon de différencier les deux est de savoir de quoi on parle, de connaître la genèse des objets qu'on manipule.

Définition 2.2 (Vecteurs colinéaires) :
Soit $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Remarque :
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.

!!! ATTENTION !!!

Le "ou" qui apparaît dans la définition est TRÈS important. Si on enlève l'un des deux morceaux de la définition, elle devient fausse. En dépit de ce que vous pouvez utiliser en physique ou en SII, il est primordial de ne pas oublier les deux propriétés.

En général, les vecteurs ne sont pas explicitement connus. L'un peut être nul. En imposant l'écriture $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, on peut avoir une absurdité si $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{u} \neq 0$. On a donc besoin des deux énoncés.

Exemple 2.1 :
Le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.1 (Caractérisations des repères cartésiens) :
Soit $\vec{\imath}, \vec{\jmath} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs et $O \in \mathbb{R}^2$ un point du plan.

$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère cartésien si, et seulement si, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de l'espace vectoriel [a] $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ne sont pas colinéaire.

a. Un espace vectoriel est un ensemble muni de certaines propriétés. Ses éléments sont appelés des vecteurs. Des vecteurs sont donc des éléments d'un espace vectoriel

Proposition 2.2 (Opérations sur les coordonnées) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan $\mathcal{P}$, $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ des points du plan. Alors :

- Le vecteurs $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathbb{R}^2$, *i.e.* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath}$.
- Si $\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, le point C de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ a pour coordonnées $(x_A + \alpha, x_B + \beta)$ (autrement dit, $C = A + \vec{u}$).

Démonstration :
Voir les petites classes. □

Remarque :
En particulier, si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_b, y_B)$ sont les coordonnées de deux points dans un repère cartésien et I le milieu du segment $[A, B]$, alors

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ On ne peut additionner que des vecteurs ou un point et un vecteurs. Mais on ne peut JAMAIS additionner deux points. Ça n'a pas de sens.

En fait, on ne peut vraiment additionner que des vecteurs. Dans le cas d'un point et d'un vecteur, ce n'est pas vraiment une addition. Le signe plus représente en réalité la translation du point par le vecteur. C'est un abus de langage qui provient de ce qui se passe au niveau des coordonnées.

Définition 2.3 (Translaté d'un point) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et A un point du plan et $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur.

Le point $B = A + \vec{u}$ est l'unique point du plan déterminé par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Théorème 2.3 (Relation de Chasles) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan, A, B, C trois points du plan. Alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Définition 2.4 (Norme d'un vecteur, Vecteur unitaire) :
Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. La norme de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ correspond à "la longueur du vecteur", *i.e.* si M est un point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ (*i.e.* $M = O + \vec{u}$ est le translaté de O par le vecteur $\vec{u}$), alors $\|\vec{u}\| = OM$.

On appelle vecteur unitaire, un vecteur de norme 1.

Définition 2.5 (Repère orthonormé) :
Un repère orthonormé du plan euclidien est la donnée $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de :

- d'un point O origine du repère ;
- de deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
  - $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de $\mathbb{R}^2$;
  - $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux ;
  - $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$ (les deux vecteurs sont unitaires).

Proposition 2.4 (Expression de la norme) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ un vecteur. Alors

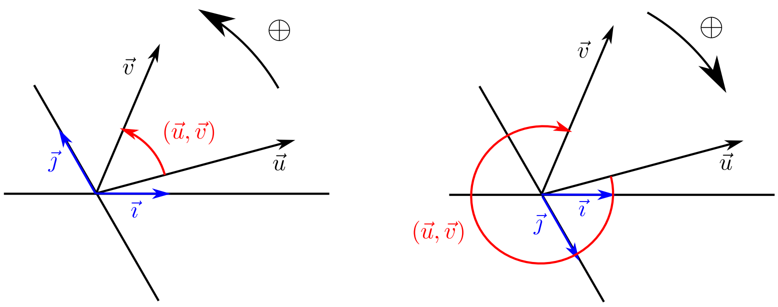
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration :
C'est Pythagore. □

Remarque :
On rappelle qu'on peut associer à un point $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ du plan son affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$, qui correspond également à l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Si $z \in \mathbb{C}$ est l'affixe d'un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, alors $\|\vec{u}\| = |z|$.

2.2 Orientation

On va maintenant définir une orientation du plan qui permet de pouvoir parler d'angle orienté. Il existe deux orientations possible du plan. Celui qui correspond à définir le sens positif des angles en allant dans le sens trigonométrique (le sens usuel), et le sens contraire pour lequel les angles positifs sont parcourus dans le sens anti-trigonométrique.



Définition 2.6 (Base directe de $\mathbb{R}^2$, orientation, repère direct) :
On définit :

- Soit (e_1, e_2) une base de $\mathbb{R}^2$. On dit que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ définit une orientation directe si elle correspond à au sens trigonométrique, et indirecte pour l'autre sens.
- Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère de $\mathcal{P}$. On dit que c'est un repère directe si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est directe.

Proposition 2.5 (Changement de repères cartésiens directs) :
On considère le plan $\mathcal{P}$ muni de deux repères $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormés directs avec $\Omega(a, b)$ dans $\mathcal{R}$.

Alors $\exists ! \theta \in [0, 2\pi[$ tel que

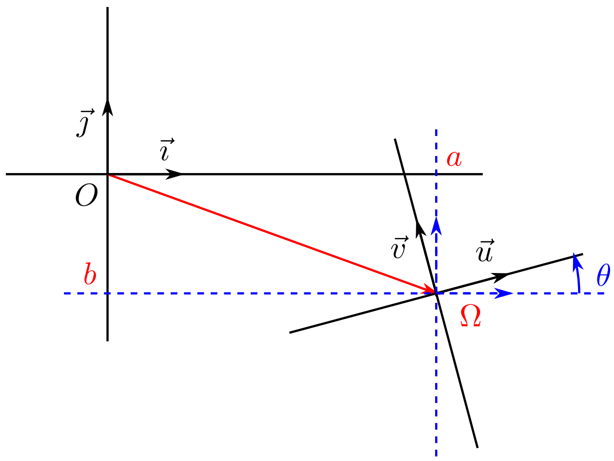
$$\begin{cases} \vec{u} = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath} \\ \vec{v} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \vec{\imath} = \cos(\theta)\vec{u} - \sin(\theta)\vec{v} \\ \vec{\jmath} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath} \end{cases}$$

Et si $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ et (x', y') dans $\mathcal{R}'$, alors ces deux couples sont liés par

$$\begin{cases} x = a + x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta) \\ y = b + x'\sin(\theta) - y'\cos(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = (x-a)\cos(\theta) + (y-b)\sin(\theta) \\ y' = -(x-a)\sin(\theta) + (y-b)\cos(\theta) \end{cases}$$



Démonstration :
On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Comme $\det_{\mathcal{C}}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) > 0$ et $\det_{\mathcal{C}}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$, la matrice de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est de déterminant strictement positif. Donc il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} \\ \vec{v} = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath} \end{cases}$$

avec $ad - bc > 0$. Mais les vecteurs sont tous unitaires, donc le théorème de Pythagore nous donne donc $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$. Donc $\exists \theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$, $c = \cos(\varphi)$ et $d = \sin(\varphi)$. Et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant aussi orthogonaux, le théorème de Pythagore nous donne encore $2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$ ce qui nous donne facilement $c = (-1)^k \sin(\theta)$ et $d = (-1)^{k+1}\cos(\theta)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Mais le déterminant est alors $(-1)^{k+1}$ qui doit être strictement positif, donc k est impair et donc

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath} \\ \vec{v} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath} \end{cases}$$

En inversant la matrice, on trouve l'autre système.

On ne va faire un changement de repère que dans un seul sens. L'autre se faisant sur le même principe.

Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonné (x', y') dans le repère $\mathcal{R}'$. Donc

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\Omega M} = x'\vec{u} + y'\vec{v} \\ \iff & \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM} = x'(\cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}) + y'(-\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}) \\ \implies & \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + (x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta))\vec{\imath} + (x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta))\vec{\jmath} \\ \iff & \begin{cases} x = a + x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta) \\ y = b + x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta) \end{cases} \end{aligned}$$

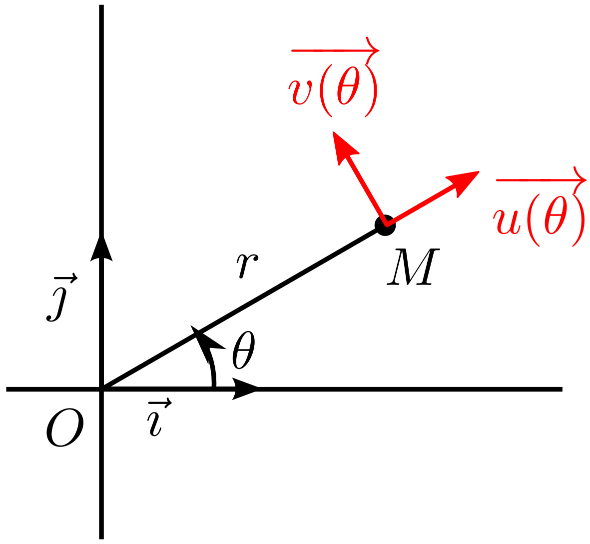
□

2.3 Repère Polaire

Définition 2.7 (Repère polaire) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé directe du plan $\mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Le repère polaire associé au réel θ est le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ où

$$\begin{cases} \overrightarrow{u(\theta)} = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{v(\theta)} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath} \end{cases}$$

Le point O est le pôle du repère et la droite orienté $(O, \vec{\imath})$ est l'axe polaire.



Définition 2.8 (Coordonnées polaires) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un ROND du plan $\mathcal{P}$ et M un point du plan distinct de l'origine O. Un système de coordonnées polaires de M est un couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u(\theta)}$.

Donc θ correspond à l'angle formé par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe des abscisses et r correspond à sa norme. Donc $|r| = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $|\theta| \equiv |(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})|[2\pi]$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Les angles sont orientés. Le fait de prendre un repère direct impose en sens de lecture pour les angles. Si le repère de base était pris indirect, il faudrait tourner dans le sens contraire pour une même valeur (algébrique) d'un angle. Il faut bien prendre garde aux orientations.

Proposition 2.6 (Existence et unicité des coordonnées polaires) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un ROND et M un point du plan distinct de O.

Alors $\exists (r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que M soit de coordonnées polaires (r_0, θ_0) et tous les couples $((-1)^n r_0, \theta_0 + n\pi)$ où $n \in \mathbb{Z}$ sont des coordonnées polaires de M. M admet donc un unique système de coordonnées polaires (r, θ) tel que $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Démonstration :
Ça provient simplement des symétries du sinus et cosinus et de leur périodicité. □

Remarque :
Bien sûr, on garderait l'unicité en changeant l'intervalle de définition de θ par n'importe quel autre intervalle semi-ouvert de longueur 2π. C'est la notion de mesure principale qui intervient ici, dépendant du choix d'un intervalle de référence pour donner les angles.

Avec la notion d'angle principale, on aura donc

$$\begin{cases} r = \|\overrightarrow{OM}\| \\ \theta \equiv (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})[2\pi] \end{cases}$$

Proposition 2.7 (Passage de coordonnées polaires à coordonnées cartésiennes [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct et M un point distinct de O de coordonnées cartésienne (x, y) et de coordonnées polaires (r, θ) (avec donc $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$). Alors on a la relation

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Démonstration :
C'est évident avec ce qui précède puisque $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u(\theta)} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ □

On peut donc en déduire la méthode suivante de coordonnées polaires à coordonnées cartésiennes (et vice versa) :

- Si on connaît (r, θ), alors les coordonnées cartésiennes se retrouve avec $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$.
- Si on connaît (x, y), alors
  — $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
  — θ est défini modulo 2π par $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$.

Bien sûr, pour trouver θ, on peut utiliser $\arccos$, $\arcsin$ voir même $\arctan$ selon ce qui nous arrange. On peut donc donner beaucoup de formule pour trouver un angle. Elles sont toutes équivalentes grâce aux formules de trigonométries. Néanmoins, elles sont chacune leur intérêt car elles n'ont pas toutes le même domaine de définition.

Exemple 2.2 :
Donner les coordonnées polaires des points $A(-\sqrt{3}/3, 1)$, $B(1,1)$ et donner les coordonnées cartésiennes des points $C(2, \frac{\pi}{8})$ et $D(\sqrt{7}, \frac{\pi}{12})$.

Remarque :
Avec des complexes, si z est l'affixe d'un point M, alors $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$ en gardant l'orientation du plan complexe usuelle.

Définition 2.9 (Base canonique de $\mathbb{R}^2$) :
On appelle base canonique de $\mathbb{R}^2$ la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\vec{\imath} = (1,0)$ et $\vec{\jmath} = (0,1)$.

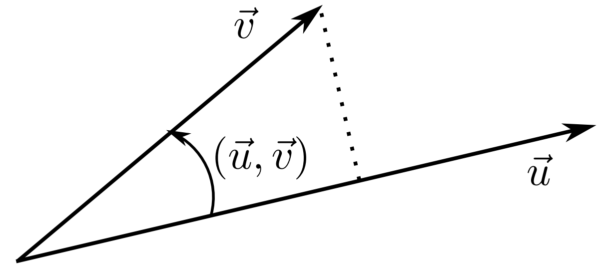
Définition-Propriété 2.10 (Repère canonique) :
Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $O(0,0)$ est le repère orthonormé directe canonique du plan.

Démonstration :
Il suffit de le vérifier. □

2.4 Produit scalaire canonique

Définition 2.11 (Produit scalaire de deux vecteurs (en coordonnées polaires) [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un ROND du plan. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On définit le produit scalaire de u et v, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq 0 \text{ et } \vec{v} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Remarque :
En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

Proposition 2.8 :
Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur. Alors
$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Démonstration :
C'est évident. □

Proposition 2.9 (Expression en coordonnées cartésiennes [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct et $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration :
Si $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$, alors $xx' + yy' = 0 = \vec{u} \cdot \vec{v}$. Supposons donc désormais que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$.

On note (r, θ) les coordonnées polaires de $\vec{u}$ et (r', φ) les coordonnées polaires de $\vec{v}$. Le lien entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes nous donne $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $x' = r'\cos(\varphi)$ et $y' = r'\sin(\varphi)$. Et $(\vec{\imath}, \vec{u}) \equiv \theta[2\pi]$ et $(\vec{\imath}, \vec{v}) \equiv \varphi[2\pi]$. Et donc $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \vec{v}) \equiv \varphi - \theta[2\pi]$. Donc

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= rr'\cos(\vec{u}, \vec{v}) \\
&= rr'\cos(\varphi - \theta) \\
&= r\cos(\theta)r'\cos(\varphi) + r\sin(\theta)r'\sin(\varphi) \\
&= xx' + yy'
\end{aligned}$$

□

Exemple 2.3 (Expression d'un vecteur orthogonal) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan et $\vec{u} = (a, b)$ un vecteur non nul.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\vec{u}$.

Remarque :
Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$. C'est à noté, ça peut servir pour montré qu'un vecteur est nul par exemple.

Proposition 2.10 (Propriété du produit scalaire [✓]) :
Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, *i.e.* :

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{w} + \mu \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \mu \vec{u} \cdot \vec{w} \end{cases}$ [*Bilinéaire*]
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ [*Symétrique*]
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \implies \vec{u} = 0$ [*Défini*]
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ [*Positif*]

Démonstration :
Avec l'expression du produit scalaire en coordonnées cartésiennes, c'est très facile. Laissé en exercice.
□

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il ne faut pas confondre le terme "défini" ici avec la notion d'application "bien définie". Ce n'est pas la même chose. On sait déjà que le produit est bien défini, c'est déjà fait dans la définition.

Remarque :
Pour la notion d'application défini, la réciproque est également valable. On aurait pu mettre une équivalence. Mais la réciproque est évidente et n'apporte aucune information.

Par ailleurs, si vous avez du mal à voir l'intérêt de l'énoncé du caractère défini, vous pouvez le remplacer par sa contraposée qui est déjà moins évidente : $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \neq 0 \implies \vec{u} \cdot \vec{u} \neq 0$.

Exemple 2.4 :
On considère les points $A(1,3)$, $B(2,-1)$ et $C(-1,3)$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les coordonnées polaires sont $(2, \frac{\pi}{12})$ et $(\sqrt{27}, \frac{\pi}{3})$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

ATTENTION ! On prendra bien garde à ne calculer le produit scalaire que de vecteurs. Le produit scalaire d'un point avec autre chose n'a aucun sens. Le produit scalaire n'est défini QUE pour des vecteurs.

Proposition 2.11 (Expression complexe du produit scalaire) :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ d'affixes respectifs $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathfrak{Re}(\overline{a}b) = \mathfrak{Re}(a\bar{b})$$

Proposition 2.12 (Caractérisation de l'orthogonalité par le produit scalaire [✓]) :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :
Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

Supposons que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\|\|v\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff (\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

□

Remarque :
En particulier, un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Exemple 2.5 :
Montrer que le triangle ABC est rectangle en A avec $A(-1,2)$, $B(2,1)$, $C(0,5)$.

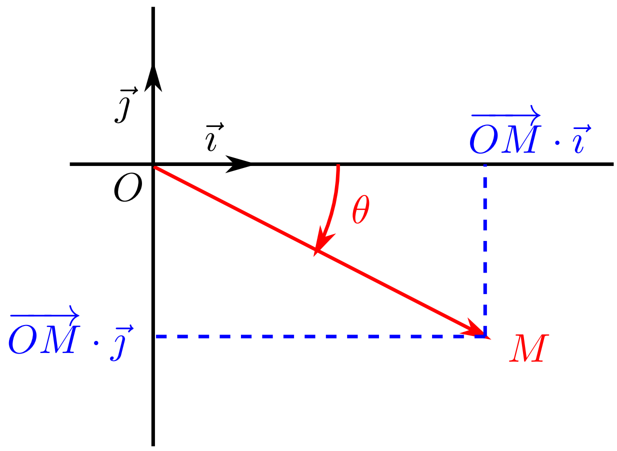
Proposition 2.13 (Décomposition d'un vecteur dans une BOND avec le produit scalaire) :
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan et $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{u} \cdot \vec{\jmath})\vec{\jmath}$$

Démonstration :
Comme on a une base de $\mathbb{R}^2$, on sait qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Par ailleurs,

$$\vec{u} \cdot \vec{\imath} = x\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} + y\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} = x$$

par bilinéarité du produit scalaire et puisque la base est une BOND. On fait de même pour le produit scalaire avec l'autre vecteur de la base, ce qui termine la démonstration. $\square$



Exemple 2.6 :
Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $a,b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\exists! \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{\imath} = a$ et $\vec{u} \cdot \vec{\jmath} = b$.

Proposition 2.14 (Théorème de Pythagore) :
Soit A, B, C trois points distincts du plan. Alors

$$ABC \text{ rectangle en } A \iff BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Démonstration :
Il suffit d'utiliser le produit scalaire.

Supposons que ABC soit rectangle en A, alors

$$BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2$$

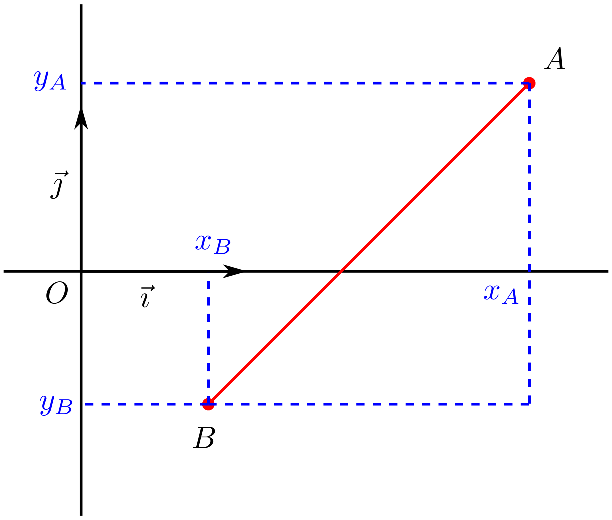
Réciproquement, supposons $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et donc les deux vecteurs sont orthogonaux par caractérisation de l'orthogonalité par le produit scalaire. □

Remarque :
On rappelle du coup que grâce au théorème de Pythagore, on a, si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$,

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Proposition 2.15 (Formules de polarisation) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Alors on a les deux formules de polarisation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

et

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

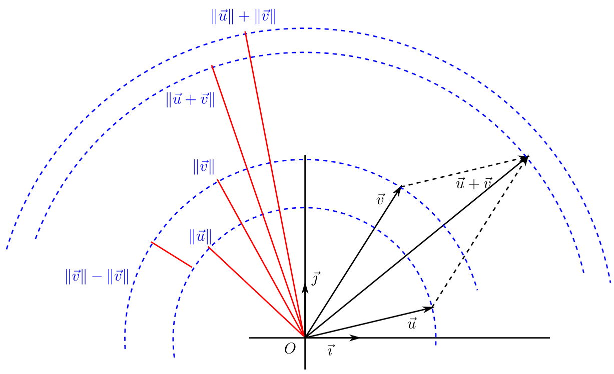
Démonstration :
Il suffit de développer $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$. □

Remarque :
L'intérêt des formules de polarisation, est de permettre de retrouver l'expression d'un produit scalaire si l'on ne connaît que les normes associés. Mais c'est surtout le cas dans la théorie générale des espaces euclidiens, c'est à dire la théorie générales de l'étude de tous les produits scalaires sur un espace vectoriel de dimension finie. Étude qui sera faite l'année prochaine.

Proposition 2.16 (Inégalité triangulaire [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\Big|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\Big| \leq \|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Démonstration :
La démo est la même que dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. □



2.5 Déterminant

Définition 2.12 (Déterminant) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soit deux vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$. Le déterminant de ces deux vecteurs, calculé dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$), est

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y \in \mathbb{R}$$

et correspond donc au déterminant de la matrice [a] représentative [b] de la famille [c] $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a. Une matrice est une sorte de tableau avec lesquelles on peut faire des calculs.
b. Beaucoup d'objet d'algèbre linéaire peuvent être représentés par une matrice.
c. Une famille de vecteurs est une collection finies de vecteurs.

Tous les détails sur le déterminant seront étudiés dans le chapitre *ad hoc*.

Exemple 2.7 :
On pose $\vec{\imath} = (1, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1)$, $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$, $\overrightarrow{e_1} = (-1, 2)$, $\overrightarrow{e_2} = (2, 1)$.

1. Calculer $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v})$, $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
2. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis calculer $\det_{(\vec{u},\vec{v})}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

!!! ATTENTION !!!

Le déterminant d'une famille de vecteur dépend complètement du choix de la base dans lequel on fait le calcul. En changeant de base, on multiplie le nouveaux déterminant par une constante non nulle qui dépend des deux bases.

Remarque :
On notera que le repère n'a pas besoin d'être orthogonal ni normé, ni même direct ici. Il faut simplement avoir des bases. Cf chapitre sur le déterminant.

Remarque :
Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, on a toujours

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = 1.$$

Proposition 2.17 (Expression du déterminant en coordonnées polaires [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un ROND du plan. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \|u\|\|v\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq 0 \text{ et } \vec{v} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration :
Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) &= xy' - x'y \\ &= rr'(\cos(\theta)\sin(\theta') - \cos(\theta')\sin(\theta)) \\ &= rr' \sin(\theta' - \theta) \\ &= rr' \sin((\vec{\imath}, \vec{v}) - (\vec{\imath}, \vec{u})) \\ &= rr' \sin(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

□

Proposition 2.18 (Propriétés du déterminant [✓]) :
Le déterminant est une application bilinéaire [a] anti-symétrique [b] alternée [c], *i.e.* : si $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère du plan,

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{w}) + \mu \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{v}, \vec{w}) \\ \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{w}) \end{cases}$ [*Bilinéaire*]
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = -\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{v}, \vec{u})$. [*Anti-symétrie*]
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$. [*Alternée*]

a. Une application bilinéaire est une application de deux variables, linéaire par rapport à chacune de ses variables. La notion de linéarité sera vu largement en détails dans les chapitres d'algèbre linéaire.
b. L'anti-symétrie peut avoir plusieurs sens différents en fonction de la nature de ce qui est anti-symétrique (une relation binaire, une application ...). Ici, l'anti-symétrie correspond à l'apparition du signe $-$ en intervertissant les deux variables du déterminant.
c. Le fait d'être alternée permet de pouvoir repérer les familles liées, c'est-à-dire les familles de vecteurs dont au moins un vecteur dépend des autres.

Exemple 2.8 :
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer $\begin{vmatrix} a+b & a+c \\ a+c & a+b \end{vmatrix}$.

Proposition 2.19 (Déterminant dans le plan complexe) :
Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le repère canonique du plan et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs d'affixes respectif $a, b \in \mathbb{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$. Alors

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathfrak{Im}(\overline{a}b) = -\mathfrak{Im}(a\overline{b}).$$

Proposition 2.20 (Caractérisation de la colinéarité par le déterminant [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

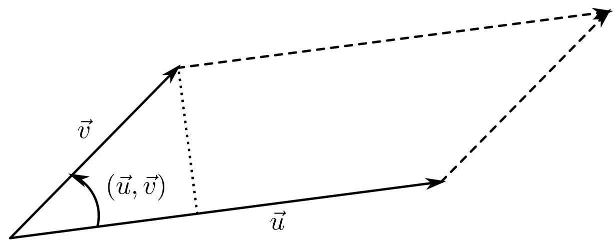
Démonstration :
On le sait déjà depuis le cours sur le déterminant, mais on va le refaire géométriquement : on suppose $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$. Alors $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = 0 \iff xy' = x'y$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.
Et avec les points, il suffit de se ramener au cas vectoriel. □

Remarque :
En particulier, trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.
Et bien sûr, le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel autre vecteur. Ce qui est cohérent avec le déterminant nul.

Exemple 2.9 :

- Que peut on dire des droites (AB) et (CD) avec $A(1, -3)$, $B(-2, 1)$, $C(4, 0)$ et $D(-2, -8)$?
- Que dire de l'ensemble des points M du plan tels que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}) = 0$?

Proposition 2.21 (Interprétation géométrique du déterminant) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$ correspond à l'aire du parallélogramme définit par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Démonstration :
Dans le parallélogramme définit par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les côtés sont de longueurs $\|u\|$ et $\|v\|$ respectivement. L'aire du parallélogramme correspond au produit de la longueur d'un côté multiplié par la longueur de la hauteur relative à ce côté.

Par exemple, si l'on considère le côté définit par $\vec{u}$, la hauteur est donc de longueur $\|v\||\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ par trigonométrie et donc l'aire $\|u\|\|v\||\sin(\vec{u}, \vec{v})| = |\det(\vec{u}, \vec{v})|$. □

Remarque :
En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $|\det(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

Exemple 2.10 :
Si $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et A un point du plan fixés, déterminer les lignes de niveaux k de l'application $M \mapsto \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$, *i.e.* déterminer l'ensemble des points M tels que $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k$.

Proposition 2.22 (Base directe / indirecte) :
Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathbb{R}^2$. Alors :

- La base $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base directe du plan si, et seulement si, $\det_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$.
- La base $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base indirecte du plan si, et seulement si, $\det_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) < 0$.
- Deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$ définissent la même orientation du plan si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$; et elles définissent des orientations contraires (ou opposées) si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) < 0$.

Remarque :
Il n'y a que deux orientations possible : directe ou indirecte. Puisqu'il n'y a que deux signes possibles pour le déterminant.

On notera que l'on retrouver la définition de bases directes et indirectes déjà vues plus haut.

2.6 Droites dans le plan

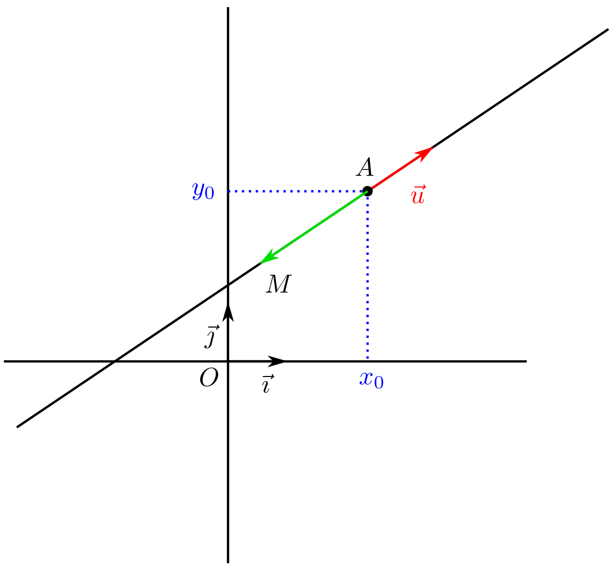
2.6.1 Équation paramétrique

Définition 2.13 (Équation paramétrique d'une droite) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et $\mathcal{D}$ une droite du plan. On appelle représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ tout système :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

où x_0, y_0, a, b sont des réels fixés.

La droite $\mathcal{D}$ correspond alors à l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées dans le repère cartésien vérifie le système pour une certaine valeur du paramètre t.



Proposition 2.23 (Construction de l'équation paramétrique d'une droite) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan, $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan et $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $\mathcal{D}$ une droite du plan.

$\mathcal{D}$ est la droite passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}$ si et seulement si

$$\mathcal{D} = M_0 + \mathrm{Vect}(\vec{u}) = M_0 + \mathbb{R}\vec{u} = \left\{ M(x, y), \ \exists t \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases} \right\}$$

Démonstration :
$\mathcal{D}$ est la droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si $\forall M \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{M_0M}$ colinéaire

à $\vec{u}$, si et seulement si $\forall M \in \mathcal{D}$, $\exists t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$, si et seulement si $\forall M \in \mathcal{D}$, $\exists t \in \mathbb{R}$, $M = M_0 + t\vec{u}$. $\square$

Remarque :
L'intérêt de l'équation paramétrique d'une droite est de pouvoir lire facilement un point par lequel passe la droite et surtout un vecteur directeur à la droite. Et inversement. À partir de la donnée d'un point de la droite et d'un vecteur directeur de la droite, il est très facile de donner l'équation paramétrique de la droite.

!!! ATTENTION !!!

On rappelle qu'il n'y a pas unicité du vecteur directeur. Ni du point par lequel passe la droite. Donc pour chaque choix d'un point et d'un vecteur directeur, on obtient une nouvelle équation paramétrique de la droite. Toutes ces équations sont équivalents, elles définissent la même droite. Mais les points de cette droite ne dépendront pas de la même valeur du paramètre pour chacune de ces équations.

Exemple 2.11 :

- Donner l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(-2, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (3, -7)$.
- On considère la droite $\mathcal{D}'$ d'équation paramétrique

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \end{cases}$$

Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ et un point par lequel passe la droite $\mathcal{D}'$. Puis donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonal à $\mathcal{D}'$ passant par le point de $\mathcal{D}'$ de paramètre -4 dans la représentation paramétrique donnée ci-dessus.

2.6.2 Équation cartésienne

Définition 2.14 (Équation cartésienne d'une droite) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et $\mathcal{D}$ une droite du plan. On appelle équation cartésienne de $\mathcal{D}$ toute équation de la forme $ax+by+c=0$ où a, b et c sont des réels fixés. $\mathcal{D}$ est alors l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifiant cette équation.

Proposition 2.24 (Équation cartésienne d'une droite) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan. Alors

- Toute droite du plan admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
- Réciproquement, toute équation du type $ax+by+c=0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n} = (a, b)$.

Démonstration :
Si on considère une droite $\mathcal{D}$ du plan. Elle admet nécessairement un vecteur normal non nul $\vec{n}$ de coordonnée (a, b). Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de la droite. Alors

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x-x_0)+b(y-y_0) = 0 \iff ax+by-ax_0-by_0 = 0$$

Réciproquement, si on considère l'équation $ax+by+c=0$ et le vecteur $\vec{n} = (a, b)$. Soit M_0 un point de coordonnée (x_0, y_0) tel que $ax_0+by_0+c=0$. Alors pour tout point $M(x, y)$ tel que $ax+by+c=0$, on a $ax+by = ax_0+by_0 \iff a(x-x_0)+b(y-y_0) \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Donc M vérifie l'équation si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}$ est orthogonal à $\vec{n}$ et donc M est sur la droite passant par M_0 orthogonal à $\vec{n}$. □

On rappelle qu'on sait déterminer les coordonnées d'un vecteur orthogonal à un autre. Donc si on connaît les coordonnées d'un vecteur normal à la droite, on peut déterminer un vecteur orthogonal à celui-ci qui sera donc un vecteur directeur de la droite.

D'où l'on déduit :

Méthodes de détermination d'une équation cartésienne d'une droite :

- En connaissant un point et un vecteur normal
  - $\rightsquigarrow$ Le produit scalaire donne l'équation cartésienne de la droite.
- En connaissant un point et un vecteur directeur
  - $\rightsquigarrow$ Le déterminant donne l'équation cartésienne de la droite.

Exemple 2.12 :
On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(-2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1,-2)$. Donné une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ et une équation cartésienne.

Exemple 2.13 :
Soit les droites

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2-t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}' : x+3y-5=0$$

Que peut on dire des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$? Déterminer les coordonnées du point d'intersections s'il y en a.

Passage d'une équation cartésienne à une équation paramétrique :

- A partir d'une équation cartésienne $ax+by+c=0$.
  On a un vecteur directeur $\vec{u} = (-b,a)$. Il suffit de trouver un point $A(\alpha,\beta)$ de la droite et on alors $M \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ et obtient donc $\mathcal{D} : \begin{cases} x = \alpha - bt \\ y = \beta + at \end{cases}$.
- A partir d'une équation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + at \\ y = \beta + bt \end{cases}$.
  On a un vecteur normal $\vec{n} = (-b,a)$, donc une équation cartésienne est de la forme $-bx + ay + c = 0$ et comme la droite passe par le point $A(\alpha,\beta)$, on a donc $c = b\alpha - a\beta$. Donc $b(\alpha - x) - a(\beta - y) = 0$.

Exemple 2.14 (Ligne de niveau) :
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, A un point du plan $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}$.
Déterminer la ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$, *i.e.* déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.

2.6.3 Distance d'un point à une droite

Définition 2.15 (Projeté orthogonal sur une droite) :
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et M un point

du plan. On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ le point $H \in \mathcal{D}$, intersection de $\mathcal{D}$ avec la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M.

Remarque :
On rappelle que par un point extérieur à une droite donnée, il n'existe qu'une seule perpendiculaire à la droite passant par ce point. Donc le point H est parfaitement défini.

Proposition 2.25 (Existence et unicité du projeté orthogonal) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et M un point du plan.

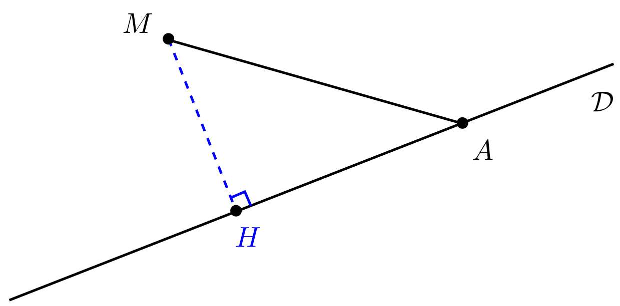
Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$ est l'unique point de $\mathcal{D}$ tel que $\forall A \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$.

Démonstration :
Commençons par l'unicité. Supposons donc qu'il existe $H_1, H_2 \in \mathcal{D}$ tels que $\forall A \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{AH_1} \cdot \overrightarrow{MH_1} = 0 = \overrightarrow{AH_2} \cdot \overrightarrow{MH_2}$. En particulier, on a donc $\overrightarrow{H_1H_2} \cdot \overrightarrow{MH_2} = 0$ et $\overrightarrow{H_2H_1} \cdot \overrightarrow{MH_1} = 0$. Donc

$$H_1H_2^2 = \overrightarrow{H_1H_2} \cdot \overrightarrow{H_1H_2} = (\overrightarrow{H_1M} + \overrightarrow{MH_2}) \cdot \overrightarrow{H_1H_2} = 0$$

Donc $H_1 = H_2$.

Il reste à montrer l'existence du projeté orthogonal. La droite $\mathcal{D}$ a une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Le vecteur $\vec{n} = (a, b)$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ et non nul. Alors la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à $\mathcal{D}$. Elle coupe donc la droite $\mathcal{D}$ en un unique point H. Maintenant, si A est un point quelconque de $\mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{MH}$ est un vecteur porté par la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ et passant par M et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est porté par la droite $\mathcal{D}$. Donc le deux vecteurs sont orthogonaux. $\square$



Définition-Propriété 2.16 (Distance d'un point à une droite [✓]) :
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et M un point du plan.

On définit la distance de M à $\mathcal{D}$, noté $d(M,\mathcal{D})$ comme la plus petite distance entre tous les points de $\mathcal{D}$ et M, *i.e.*

$$d(M,\mathcal{D}) = \inf_{A\in\mathcal{D}} AM$$ [a]

[a]. Voir le chapitre sur les relations d'ordre pour la définition de la borne inf.

Démonstration :
On considère l'ensemble $\{AM,\ A \in \mathcal{D}\}$. Cet ensemble est non vide puisque $\mathcal{D}$ contient au moins un point (donc on peut calculer au moins une distance). Et cet ensemble est minorée par 0 (ce sont des distances, donc positives). Et par propriété de la borne inf de $\mathbb{R}$ [1], $d(M,\mathcal{D})$ existe. □

Proposition 2.26 (Distance d'un point à une droite [✓]) :
soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ dans ce repère, A un point de $\mathcal{D}$, $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$, $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et soit $M(x_0,y_0)$ un point du plan.

Alors la distance de M à $\mathcal{D}$ est donnée par

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})|}{\|\vec{u}\|} = MH$$

où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Démonstration :
Avec la définition du projeté orthogonal et le théorème de Pythagore, on a $\forall B \in \mathcal{D}$, $BM^2 = BH^2 + HM^2$. Donc $\forall B \in \mathcal{D}$ avec $B \neq H$, $BM^2 > HM^2$ et donc $d(M,\mathcal{D}) = HM$ (c'est en fait un minimum).

Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ étant orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Donc

$$\begin{aligned} d(M,\mathcal{D}) &= HM \\ &= \frac{\|\overrightarrow{HM}\|\|\vec{u}\||\sin(\overrightarrow{HM},\vec{u})|}{\|\vec{u}\|} \\ &= \frac{|\det(\overrightarrow{HM},\vec{u})|}{\|\vec{u}\|} \end{aligned}$$

1. Voir chapitre relation d'ordre pour la propriété en question.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|\det(\overrightarrow{HA},\vec{u}) + \det(\overrightarrow{AM},\vec{u})|}{\|\vec{u}\|} && \text{bilin } \det \\
&= \frac{|\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})|}{\|\vec{u}\|} && \text{car } A, H \in \mathcal{D}
\end{aligned}
$$

et on a également

$$
\begin{aligned}
d(M,\mathcal{D}) &= HM \\
&= \frac{|\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \frac{|\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \frac{|ax + by - ax_1 - by_1|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} && \text{car } A \in \mathcal{D}
\end{aligned}
$$

□

Exemple 2.15 :
On considère les droites

$$
\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2t - 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}' : 4x - 5y + 2 = 0
$$

et le point $M(5,2)$. Déterminer la distance de M aux deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Proposition 2.27 (Intersection de deux droites) :
Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites du plan. Alors :

(i) Si les deux droites ne sont pas parallèles, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2) = 1$.

(ii) Si les deux droites sont parallèles, alors :
- Si $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$, alors $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$
- Sinon, $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$.

Cette proposition est formulée dans un cadre assez général pour pouvoir l'adapter aux différents énoncés qu'on pourrait avoir. Dans le cas où l'on connaît des vecteurs normaux, la condition devient une condition de non colinéarité des vecteurs normaux ; dans le cas où on a des vecteurs directeurs, c'est aussi une condition de non colinéarité des vecteurs directeurs ; dans le cas où l'on a un vecteur directeur et un vecteur normal, il ne faut pas qu'ils soient orthogonaux ; ces conditions pouvant elles-mêmes être transcrites en termes de produits scalaires ou de déterminants.

Exemple 2.16 :
Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ en fonction du paramètre m, sachant que $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par $A(1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (-1, m)$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par $B(m,1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (m+1, 2)$.

2.7 Cercles

Définition 2.17 (Cercle) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Soit Ω un point du plan $\mathcal{P}$ et $r \geq 0$. Le cercle de centre Ω et de rayon r, noté $C(\Omega, r)$ est l'ensemble des points M à distance r de Ω, *i.e.*

$$C(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{P},\ \Omega M = r\}$$

Remarque :
Notons que $C(\Omega, 0) = \{\Omega\}$.

Définition 2.18 (Équation cartésienne d'un cercle) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et $\mathcal{C}$ un cercle. On appelle équation cartésienne de $\mathcal{C}$ toute équation de la forme

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Proposition 2.28 (Équation cartésienne d'un cercle) :
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan, $\Omega(a,b)$ un point du plan et $r \geq 0$. Alors :

- Le cercle de centre Ω et de rayon r a pour équation cartésienne

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0\,.$$

- Si $\Gamma = \{M(x,y),\ x^2+y^2-2ax-2by+c=0\}$, alors

$$\Gamma = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a^2+b^2-c<0 \\ \{\Omega(a,b)\} & \text{si } c = a^2+b^2 \\ C(\Omega,r) & \text{avec } r=\sqrt{a^2+c^2-c} \text{ si } a^2+b^2-c>0 \end{cases}$$

Démonstration :
On a

$$r^2 = \Omega M^2 = (x-a)^2+(y-b)^2 = x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-2ax-2by+c = (x-a)^2+(y-b)^2+c-a^2-b^2 = 0 \\ \iff & (x-a)^2+(y-b)^2 = a^2+b^2-c \\ \iff & \Omega M^2 = a^2+b^2-c \end{aligned}$$

Donc si $a^2+b^2-c<0$, il n'y a pas de solution à cette équation. Et donc pas de points. Si $a^2+b^2-c=0$, il n'y a qu'une unique solution pour $(x-a)^2=0=(y-b)^2$. Et si $a^2+b^2-c>0$, les points M sont donc à distance $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$ de Ω, c'est donc le cercle de centre Ω et de rayon r. □

Méthodes pour trouver l'équation ou les éléments d'un cercle :

- À partir de l'équation cartésienne $\rightsquigarrow$ Centre et rayon du cercle
  — Mettre sous formes canoniques les deux bouts avec des carrés.
  — En fonction du second membre, lire le centre et le rayon.
- À partir du centre et du rayon $\rightsquigarrow$ Équation cartésienne
  — Écrire $M \in C \iff \Omega M^2 = r^2$

Exemple 2.17 (Lignes de niveau) :
Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$ et I le milieu de $[A,B]$. Soit $k\in\mathbb{R}$. Déterminer la ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$, *i.e.* déterminer l'ensemble des points $M\in\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=k$.

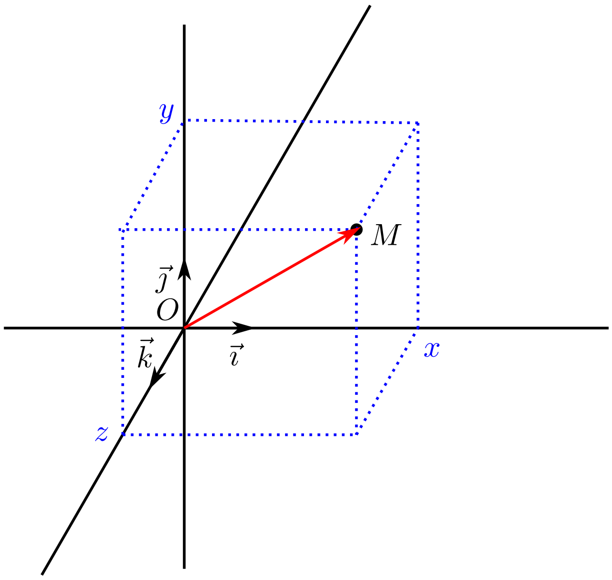
3 Cas de $\mathbb{R}^3$

3.1 Repères

3.1.1 Repère cartésien

Définition 3.1 (Repère cartésien) :
Un repère cartésien de l'espace est la donnée d'un point O et de trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$ formant une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque :
Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est donc un repère cartésien si et seulement si $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ ne sont pas coplanaires.



Définition 3.2 (Coordonnées cartésiennes) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère cartésien et M un point de l'espace. On définit le triplet (x, y, z) de réels de coordonnées cartésiennes de M comme étant les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, *i.e.*

$$M(x, y, z) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Proposition 3.1 (Existence et unicité des coordonnées cartésiennes) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace.

Alors, pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que (x, y, z) soit les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Démonstration :
C'est simplement la définition des coordonnées d'un point et le fait qu'on a une base. □

Définition 3.3 (Translaté d'un point) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace, A un point et $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de l'espace.
Le point $B = A + \vec{u}$ est l'unique point du plan vérifiant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Théorème 3.2 (Relation de Chasles) :
Soit A, B, C trois points de l'espace. Alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Proposition 3.3 (Opérations sur les coordonnées) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. Alors

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$.
- Si $\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, le point C de l'espace défini par $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ a pour coordonnées $(x_A + \alpha, y_A + \beta, z_A + \gamma)$ (*i.e.* $C = A + \vec{u}$).

Remarque :
On a encore pour le milieu I d'un segment $[A, B]$

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Proposition 3.4 (Expression de la norme dans un RON) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un RON de l'espace et $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Démonstration :
Là aussi, c'est Pythagore. □

3.1.2 Orientations

Pour pouvoir étudier des angles dans l'espace, il faut pouvoir définir une orientation pour savoir dans quel sens un angle sera comptés positivement. Comme dans le plan, il n'y a que 2 orientations possible de l'espace.

Définition 3.4 (Repère direct, repère indirect) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

On dit que $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère direct, si les trois vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, dans cet ordre, peuvent être placé sur le pouce, l'index et le majeur de la main droite (dans cet ordre). S'ils correspondent aux doigts de la main gauche, le repère est indirect.

$$\begin{array}{lll} \vec{\imath} & \rightsquigarrow & \text{Pouce} \\ \vec{\jmath} & \rightsquigarrow & \text{Index} \\ \vec{k} & \rightsquigarrow & \text{Majeur} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{Main droite} & \rightsquigarrow & \text{Base } (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) \text{ direct} \\ & & \\ \text{Main gauche} & \rightsquigarrow & \text{Base } (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) \text{ indirect} \end{array}$$

Exemple 3.1 :
La base canonique de $\mathbb{R}^3$ vérifie la règle de la main droite et donc donne toujours un repère direct.

Remarque :
Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ définit une certaine orientation, alors $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, -\vec{k})$ définit l'orientation opposé.

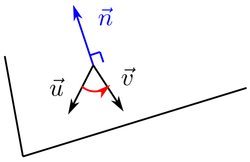
Un angle orienté dans l'espace entre deux vecteurs non colinéaires, correspond à l'angle orienté dans le plan défini par ces deux vecteurs, en choisissant l'orientation du plan de façon cohérente avec l'orientation de l'espace.

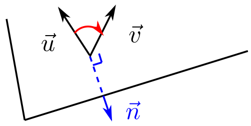
Définition 3.5 (Orientation d'un plan de l'espace) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orienté de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$.

Orienté $\mathcal{P}$ c'est choisir deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$ tel que la base $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ définisse la même orientation de l'espace.

Remarque :
Donc orienté un plan dans l'espace, c'est simplement faire le choix d'un sens pour un vecteur normal. Ils ont tous la même direction. Mais une fois un sens choisi, ça détermine l'ordre dans lequel on doit choisir deux vecteurs directeurs quelconques du plan et donc une orientation de l'espace.

Il suffit d'utiliser la règle de la main droite pour ça : Si $\vec{n}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est et $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{n})$ définissent des orientations différents de l'espace. Les deux cas correspondent aux deux orientations possible de $\mathcal{P}$. Et donc, une fois un vecteur $\vec{n}$ choisi, il n'y a qu'une orientation possible de $\mathcal{P}$ qui est correspond à une orientation choisi de l'espace.





Remarque :
Inversement, si on a une orientation d'un plan de l'espace, on peut étendre cette orientation à l'espace entier en choisissant un vecteur normal au plan.

> Définition 3.6 (Axe orienté) :
> On appelle axe orienté de l'espace toute droite munie d'une orientation, c'est à dire la donnée $(\mathcal{D}, \vec{u})$ où $\mathcal{D}$ est une droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Remarque :
Orienter un axe permet également d'orienter les plans perpendiculaires à cet axe.

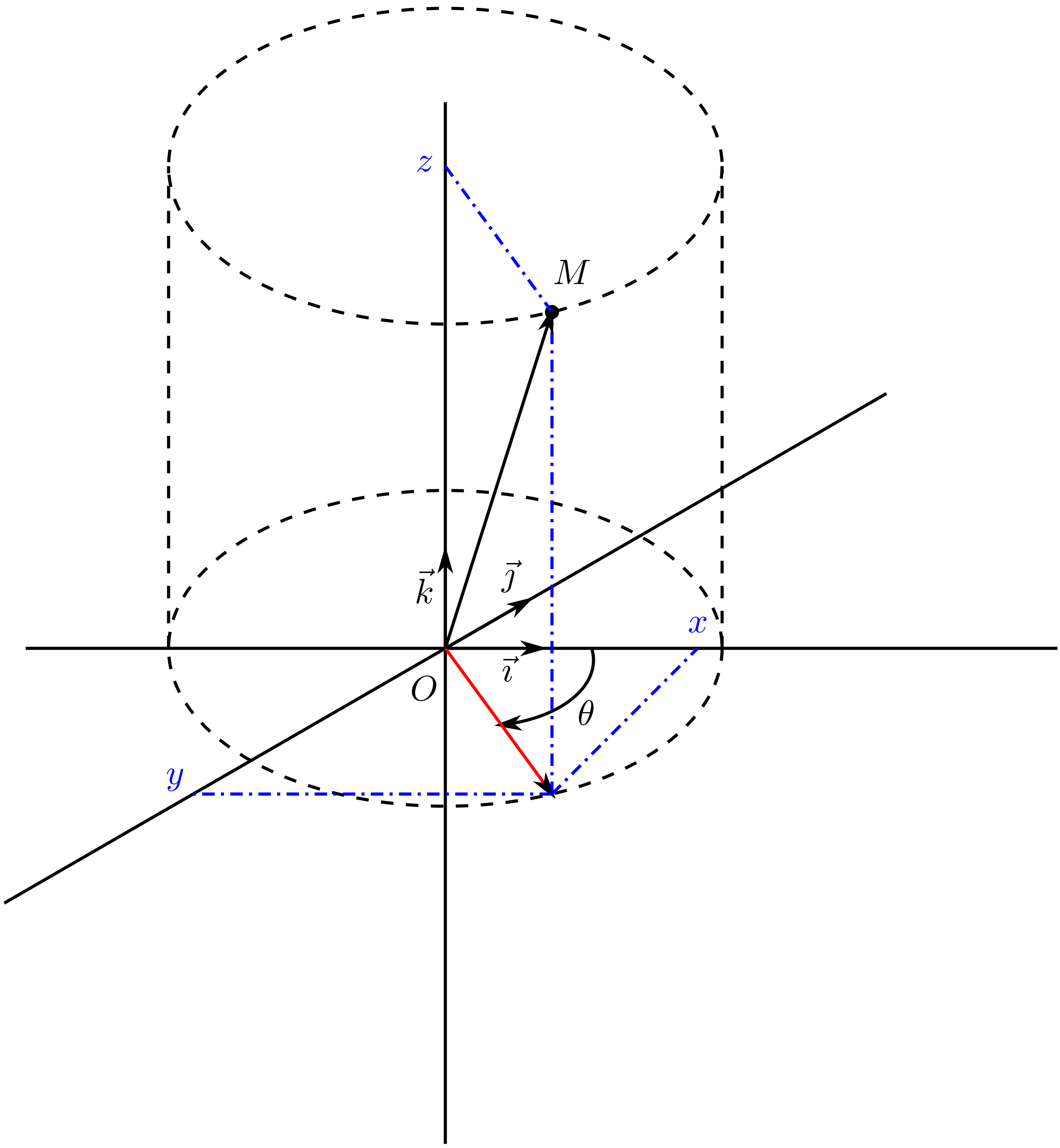
> Définition 3.7 (Repère orthonormé direct) :
> Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace. On dit que ce repère est :
>
> - normé si $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$
> - orthogonal si les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux
> - direct si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ définit la même orientation que la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
>
> Un repère normé, orthogonal et direct est appelé repère orthonormé direct.

Remarque :
Comme dans le plan, la notion de repère direct est indispensable pour pouvoir parler d'angle orienté. C'est le "direct" qui donne l'orientation des angles.

Comme dans le plan, il n'y a que deux orientations possibles de l'espace. Direct ou indirect.

3.1.3 Repère cylindrique

> Définition 3.8 (Coordonnée cylindrique) :
> Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace et soit M un point de l'espace.
>
> Un système de coordonnées cylindrique de M est un triplet (r, θ, z) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) + z\vec{k}$, où $u(\theta) = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$.



Proposition 3.5 (Existence et unicité des coordonnées cylindriques) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

Alors, pour tout point M de l'espace différent qui n'est pas sur l'axe (Oz), il existe un unique triplet $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u(\theta)} + z\vec{k}$$

Démonstration :
On regarde le vecteur le point M' du plan (xOy) définit par $\overrightarrow{OM'} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$. C'est un point d'un plan qui a donc des coordonnées polaires. Donc $\exists!(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi]$ tel que $\overrightarrow{OM'} = r\vec{u(\theta)}$ ($M" \neq 0$ puisque M n'est pas sur l'axe (Oz)). Et la relation de Chasles termine la démo. $\square$

Exemple 3.2 :
Déterminer les coordonnées cylindriques du point $A(2,2,-3)$.

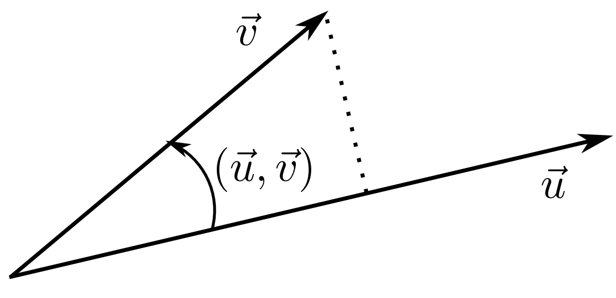
Remarque :
Il existe un autre type de coordonnées qui sont les coordonnées sphériques. C'est la version 3D des coordonnées polaires du plan. Mais ce système de coordonnées n'est pas au programme, bien qu'il est utilisé et indispensable en physique et en SII.

3.2 Produit scalaire

Définition 3.9 (Produit scalaire) :
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace et $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs.
On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq 0 \text{ et } \vec{v} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ est calculé dans le plan définit par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Remarque :

Exactement comme dans le plan, on a encore

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Remarque :
Pour déterminer l'angle entre deux vecteurs, il faut se ramener au cas de la dimension 2. L'angle entre deux vecteurs correspond à l'angle entre les deux vecteurs dans le plan orienté engendré par ces deux vecteurs.

Proposition 3.6 (Expression du produit scalaire en coordonnées cartésiennes) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace et $\overrightarrow{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$, $\overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration :
Dans le cas où les deux vecteurs sont colinéaires, c'est évident. On suppose alors que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

En appliquant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle définit par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on trouve

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

En utilisant la définition géométrique du produit scalaire, en calculant les normes puis en simplifiant, on a l'expression annoncé. □

Proposition 3.7 (Orthogonal d'un vecteur) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace et $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ est un plan vectoriel engendré par $\vec{v} = b\vec{\imath} - a\vec{\jmath}$ et $\vec{w} = c\vec{\imath} - a\vec{k}$ (par exemple).

Démonstration :
Il faut résoudre l'équation $ax + by + cz = 0$. C'est le noyau d'une forme linéaire, donc c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, donc un plan. Et il est facile de vérifier que les deux vecteurs proposés sont effectivement orthogonaux à $\vec{u}$. Dans le cas où $a \neq 0$, ces deux vecteurs sont linéairement indépendants (et donc non nuls). Dans le cas où $a = 0$, il est facile d'en trouver deux autres linéairement indépendants. □

Proposition 3.8 (Propriété du produit scalaire) :
Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, *i.e.* :

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{w} + \mu\vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \mu\vec{u} \cdot \vec{w} \end{cases}$ [*Bilinéaire*]
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ [*Symétrique*]
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \implies \vec{u} = 0$ [*Définie*]
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ [*Positif*]

Démonstration :
Avec l'expression du produit scalaire en coordonnées cartésiennes, c'est très facile. Laissé en exercice.
□

Proposition 3.9 (Caractérisation de l'orthogonalité par le produit scalaire [✓]) :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :
La démonstration est sensiblement la même que celle dans le plan. □

Proposition 3.10 (Décomposition d'un vecteur dans un BON avec le produit scalaire) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé et soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{u} \cdot \vec{\jmath})\vec{\jmath} + (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}$$

Démonstration :
Comme $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a donc $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ uniquement déterminé. Mais dans ce cas

$$\vec{u} \cdot \vec{\imath} = x\|\vec{\imath}\|^2 + y\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} + z\vec{k} \cdot \vec{\imath} = x$$

puisque c'est une base orthonormé et bilinéarité du produit scalaire. On fait de même avec $\vec{u} \cdot \vec{\jmath}$ et $\vec{u} \cdot \vec{k}$ et on trouve le résultat. □

Remarque :
Dans l'espace aussi, on a

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemple 3.3 :
On considère les point $A(1, 3, -1)$, $B(-1, 2, 3)$ et $C(a, -1, 1)$. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de sorte que le triangle ABC soit rectangle en A et donner la longueur de l'hypoténuse.

3.3 Déterminant

Cette partie sera largement développé dans le chapitre correspondant en fin d'année. On va donc se contenter, pour le moment, des propriétés les plus basiques.

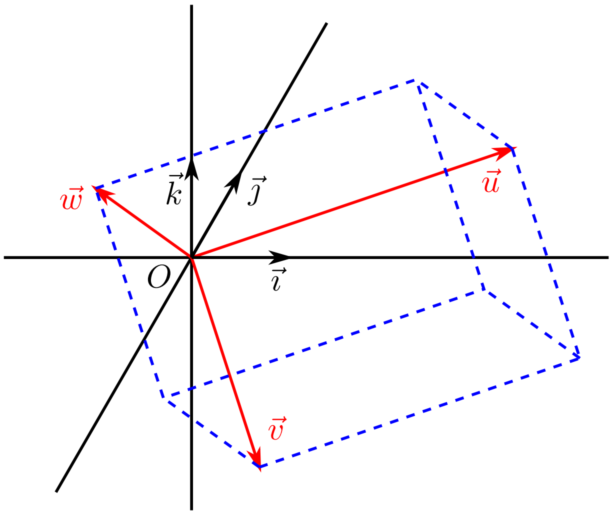
Définition 3.10 (Déterminant (Formule de Sarrus)) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\vec{u_i} = x_i\vec{\imath} + y_i\vec{\jmath} + z_i\vec{k}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors, relativement à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - y_1x_2z_3 - x_1z_2y_3$$

Exemple 3.4 :
Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Remarque :
Le déterminant des trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ correspond géométriquement au volume du parallélépipède rectangle orienté définit par ces trois vecteurs (le parallélépipède définit par ces trois vecteurs dans cet ordre, et donc avec un signe).



Définition 3.11 (Vecteurs coplanaires) :
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On dit que ces trois vecteurs sont coplanaires si l'un est combinaison des autres, ou encore si $\exists(a,b,c) \neq 0$ tel que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$, ou encore si $\dim(\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}))$ [a] ≤ 2.

a. Les dimensions et les espaes vectoriels engendrés seront étudiés largement dans les chapitres d'algèbre linéaire à venir.

Proposition 3.11 (Caractérisation de la coplanarité par le déterminant [✓]) :
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace et $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs.
Alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\iff \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.

Démonstration :
C'est évident compte tenu des propriétés algébriques du déterminant qui seront, encore une fois, largement étudiés plus tard. Il est toutefois possible de le démontrer à partir de l'expression du déterminant, mais c'est très fastidieux, peu intéressant et pu formateur sous cette forme. □

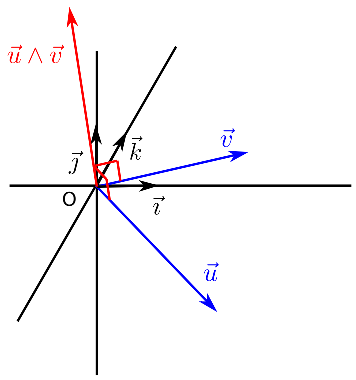
Proposition 3.12 (Déterminant et orientation) :
Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Alors $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, $\det_{\mathcal{C}}(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) \neq 0$ et l'orientation de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est déterminer par le signe du déterminant (direct pour positif et indirect pour négatif).

Exemple 3.5 :
On considère les vecteurs $\vec{\imath} = (0,1,1)$, $\vec{\jmath} = (1,0,1)$, $\vec{k} = (1,1,0)$. Déterminer si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ou non. Si oui, déterminer si c'est une base directe ou indirecte.

3.4 Produit vectoriel

Définition 3.12 (Produit vectoriel [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un ROND de l'espace et soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On définit le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, comme étant le vecteur de norme $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ et orthogonal dans le sens direct au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls. Si $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$, on pose $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.

Donc on a toujours $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \geq 0$.



φ C'est la règle de la main droite en physique (et en SII).

Remarque :
En adaptant une démo du cas du plan, le parallélogramme définit par $\vec{u}$ est $\vec{v}$ est d'aire $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Proposition 3.13 (Produits vectoriels d'une BOND [✓]) :
Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une BOND de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} \qquad \text{et} \qquad \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

Démonstration :
C'est facile avec la définition. □

Remarque :
On a aussi, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Mais c'est moins pratique que le produit scalaire.

Proposition 3.14 (Expression du déterminant avec le produit scalaire et le produit vectoriel [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\det_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Démonstration :
La démo n'est pas accessible pour le moment et est légèrement hors programme de toutes façons. □

Exemple 3.6 (Inégalité de Hadamard) :
Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$|\det_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|.$$

Proposition 3.15 (Expression dans une BOND [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un ROND et $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$. Alors, utilisant les représentation matricielle,

$$\mathrm{Mat}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u} \wedge \vec{u'}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Démonstration :
Cette expression est un corollaire du lien avec le déterminant. En utilisant les propriétés du déterminant (qui seront vues plus tard), on peut avoir ce résultat facilement. $\square$

Remarque :
Pour pouvoir calculer facilement un produit vectoriel, il faut faire :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ x \end{array} \wedge \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ x' \end{array} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Exemple 3.7 :
Reprendre les calculs de déterminant précédents et faire le lien avec le produit vectoriel.

Proposition 3.16 (Propriété du produit vectoriel) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. Le produit vectoriel est une application bilinéaire antisymétrique :

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda\vec{u} \wedge \vec{w} + \mu\vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u} \wedge \vec{v} + \mu\vec{u} \wedge \vec{w} \end{cases}$ [*Bilinéaire*]

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$. [*Antisymétrie*]

Démonstration :
La démo est simple avec l'expression du produit vectoriel dans une BOND. C'est du calcul long et fastidieux mais sans grande difficulté. Il est bon de le faire. C'est un bon entraînement de calcul de produit vectoriel. $\square$

Proposition 3.17 (Caractérisation de la colinéarité par le produit vectoriel [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace et soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\vec{u} \text{ colinéaire à } \vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$$

Et de plus, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ (le produit vectoriel est donc orthogonal aux deux vecteurs qui le composent).

Démonstration :
Avec la définition géométrique du produit vectoriel, c'est évident. □

Proposition 3.18 (Création d'une BOND avec le produit vectoriel [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthogonal directe de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration :
Évident avec la définition du produit vectoriel. □

Remarque :
En pratique, on prendra $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs unitaires orthogonaux. Et dans ce cas, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une BOND.

Proposition 3.19 (Double produit vectoriel) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$$

Démonstration :
Il suffit de faire le calcul. □

Exemple 3.8 :

Soit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ avec $\vec{a} \neq \vec{0}$. Résoudre l'équation $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ d'inconnue $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Remarque :
On peut exprimer le produit vectoriel à partir de déterminant 2×2 : si $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Voir le chapitre sur le déterminant et le développement d'un déterminant selon la dernière colonne.

3.5 Plans et Droites

Dans la suite, on donnera les énoncés essentiellement dans le repère canonique de l'espace par soucis de simplicité des énoncés et parce que ce sera le cas général d'utilisation. Si ce n'est pas le cas, si on ne se place pas dans le repère canonique de l'espace, il faudra alors adapter tous les énoncés.

3.5.1 Plans

3.5.1.1 Équations

Définition 3.13 (Représentation paramétrique) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace et P un plan de l'espace. Un système de représentation paramétrique de P est un système de trois équations linéaires que doivent vérifier tous les points du plan. C'est donc la donnée de $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$M(x, y, z) \in P \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu\alpha \\ y = y_0 + \lambda b + \mu\beta \\ z = z_0 + \lambda c + \mu\gamma \end{cases}$$

Proposition 3.20 (Représentation paramétrique à partir de deux vecteurs directeurs) :

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace et $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ et $\vec{v} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$ et soit P un plan.

Alors

$$P = M_0 + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})\ ^{a} \iff P : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu\alpha \\ y = y_0 + \lambda b + \mu\beta \\ z = z_0 + \lambda c + \mu\gamma \end{cases}$$

a. P est le plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par M

Démonstration :
On a $M \in P \iff \overrightarrow{MM_0} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{MM_0} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. □

Remarque :
La représentation paramétrique d'un plan est en pratique peu utile. À cause des deux paramètres. C'est désagréable. On utilise de préférence l'équation cartésienne qui est beaucoup plus simple. Mais elle a l'avantage de permettre de pouvoir donner directement des vecteurs directeurs du plan.

Proposition 3.21 (Représentation paramétrique à partir du déterminant [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace, $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$ et $P = M_0 + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

Alors une équation paramétrique de P est donné par

$$M \in P \iff \det(\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Démonstration :
Il suffit d'utiliser la caractérisation de la coplanarité de trois vecteurs par le déterminant ; □

Exemple 3.9 :
On considère les points $A(1, -1, 2)$, $B(1, 1, 0)$ et $C(2, 1, 0)$. Déterminer un système de représentation paramétrique du plan défini par le triangle ABC.

Définition 3.14 (Équation cartésienne) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de $\mathbb{R}^3$ et P un plan de l'espace. On appelle équation cartésienne de P toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Un point M du plan étant sur le plan si, et seulement si, ses coordonnées vérifient cette équation.

Proposition 3.22 (Existence d'une équation cartésienne) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Alors

- $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $(a, b, c) \neq 0$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ soit une équation cartésienne de P. Et dans ce cas $\vec{n} = (a, b, c) \neq 0$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
- Réciproquement, si $\vec{n} = (a, b, c) \neq 0$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors $\exists! d \in \mathbb{R}$ tel qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ soit de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et d est déterminé par n'importe quel point de $\mathcal{P}$.

Remarque :
Une équation cartésienne d'un plan est en fait unique à un coefficient multiplicatif près. Autrement dit, si $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ dont deux équations cartésiennes du même plan $\mathcal{P}$, alors $\exists k \in \mathbb{R}^*$ tel que $(a', b', c', d') = k(a, b, c, d)$.

Plus précisément, la constante est unique à un vecteur normal donné. Mais il y a une infinité de vecteur normal à P qui sont tous proportionnel entre eux. Donc il existe une infinité d'équation cartésienne de P, toutes proportionnelles.

Proposition 3.23 (Lien vecteurs directeurs / vecteur normal [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Alors

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$, alors $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ non colinéaires tel que $\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ est une famille de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

Remarque :
Autrement dit, si on connaît deux vecteurs directeurs (ou 3 points du plan), il est facile d'avoir un vecteur normal qui nous donne alors facilement une équation cartésienne du plan.

Et inversement, si on connaît un vecteur normal, on peut trouver deux vecteurs directeurs du plan sans trop de difficultés en choisissant deux vecteurs linéairement indépendants et orthogonaux au vecteur normal au plan.

Exemple 3.10 :
On considère les points $A(1, -1, 2)$, $B(1, 1, 0)$ et $C(2, 1, 0)$. Déterminer une équation cartésienne du plan défini par le triangle ABC. Établir le lien avec l'exemple précédent.

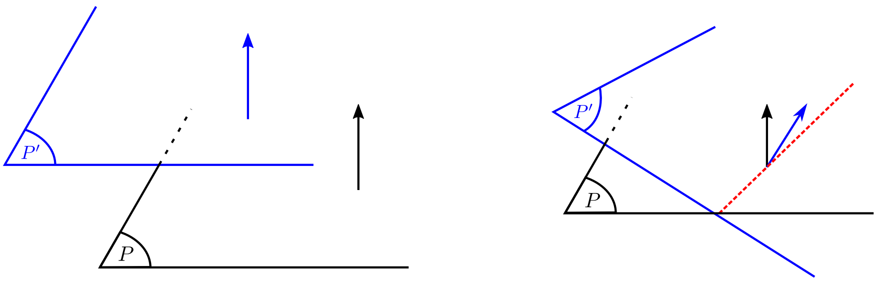
Exemple 3.11 :
On considère les plans $\mathcal{P}_1 : x + my - (m-1)z + 2 = 0$, $\mathcal{P}_2 : m^2x - y + mz - 1 = 0$ et $\mathcal{P}_3 : (m+1)x + (m^2+m)y - (m^2-1)z + m + 1 = 0$. Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont orthogonaux et $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont parallèles.

3.5.1.2 Intersections

Proposition 3.24 (Intersections de deux plans) :
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et P et P' deux plans de l'espace de vecteurs normal $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ respectivement. Alors :

- $\vec{n}\wedge\vec{n'}\neq 0$ si et seulement si les plans ne sont pas parallèles et $P\cap P'$ est une droite.
- $\vec{n}\wedge\vec{n'}=0$ si et seulement si les plans sont parallèles. Et deux cas sont possibles.
  - Si $P\cap P'\neq\emptyset$, alors $P=P'$
  - Sinon $P\cap P'=\emptyset$.

Démonstration :
Si $\vec{n}\wedge\vec{n'}=0$, les plans admettent donc des vecteurs normaux qui sont colinéaires. Ils sont donc perpendiculaire à une même droite. Ils sont donc parallèles. Dans ce cas, s'ils ont un point communs, il seront confondus, sinon, ils sont parallèles et distincts. □

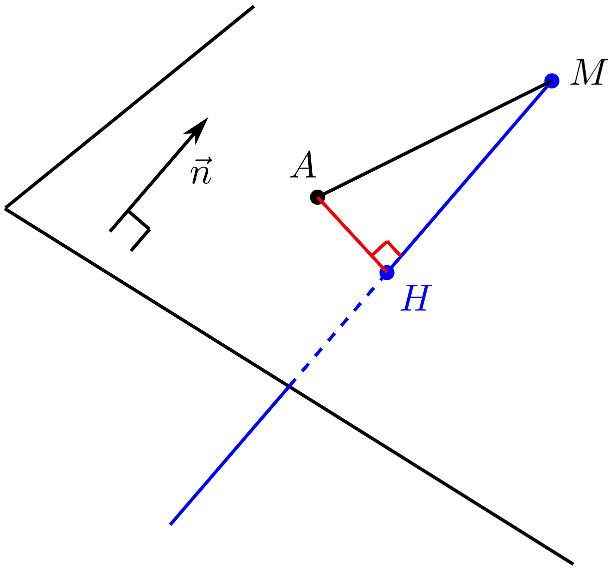


Exemple 3.12 :
Donner une condition sur m pour que les trois plans suivants se coupent sur une même droite. $(P): x+my-z+1=0$, $(P'): (m+1)x+3y+4z-2=0$ et $(P''): y+(2m+4)z-(2m+2)=0$.

3.5.1.3 Distance d'un point à un plan

Définition 3.15 (Projeté orthogonal) :
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le repère canonique de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par le point $A(x_0,y_0,z_0)$. Soit M un point de l'espace.

Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M.



Remarque :
Le projeté orthogonal est donc unique pour un point donné. Et pour trouver les coordonnées de H, il suffit donc de trouver les coordonnées d'un point qui vérifie la définition de $\mathcal{P}$ (équation si on a) et vérifiant un produit scalaire.

Exemple 3.13 :
Soit $\mathcal{P} : 2x - y + 3z + 7 = 0$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $M(x, y, z)$ sur $\mathcal{P}$ de deux façons différentes.

Définition-Propriété 3.16 (Distance d'un point à un plan) :
Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et M un point de l'espace. On définit définit la distance du point M au plan $\mathcal{P}$, noté $d(M, \mathcal{P})$ comme la plus petite distance entre M et un point du plan, *i.e.*

$$d(M, \mathcal{P}) = \inf_{A \in \mathcal{P}} AM.$$

Démonstration :
Comme $\mathcal{P}$ est un plan, il existe (au moins) un point A_0 sur le plan. Et donc $\{AM,\ A \in \mathcal{P}\}$ est non vide. C'est un ensemble minoré par 0, donc par propriété de la borne inf de $\mathbb{R}$ [2], $\inf_{A \in \mathcal{P}} AM$ existe. Et donc $d(M, \mathcal{P})$ a un sens. □

2. voir chapitre sur les relations d'ordre

Proposition 3.25 (Distance d'un point à un plan [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace, $M(x, y, z)$ un point et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par un point A. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$. Alors

$$d(M, \mathcal{P}) = MH = \frac{|\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration :
Il suffit d'adapter la démonstration dans le plan. Le principe est le même. □

Exemple 3.14 :
On considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(1, 2, 0)$. Déterminer les points D sur la droite perpendiculaire au plan (ABC) passant par A tel que A soit à distance $1/4$ du plan (DBC).

3.5.2 Droites

En faisant un parallèle avec la dimension 2, les plans sont à l'espace, ce que les droites sont au plan. Les droites de l'espace sont donc un peu "entre deux" et ne sont donc moins facile à décrire. Les choses sont un peu plus compliqués.

3.5.2.1 Équation paramétrique

Définition 3.17 (Système de représentation paramétrique) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace, $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est un système de la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

où $(a, b, c) \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.26 (Système de représentation paramétrique) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. Alors

- Si $\mathcal{D}$ passe par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et est dirigé par le vecteur $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$, alors une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donné par

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

- Si le système

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

  est un système de représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, alors le point $A(x_0, y_0, z_0)$ est un point de la droite et $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Deux plus deux systèmes de représentation paramétrique de $\mathcal{D}$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = x_1 + a't' \\ y = y_1 + b't' \\ z = z_1 + c't' \end{cases}$$

vérifient $\exists k \in \mathbb{R}$, $(a', b', c') = k(a, b, c)$.

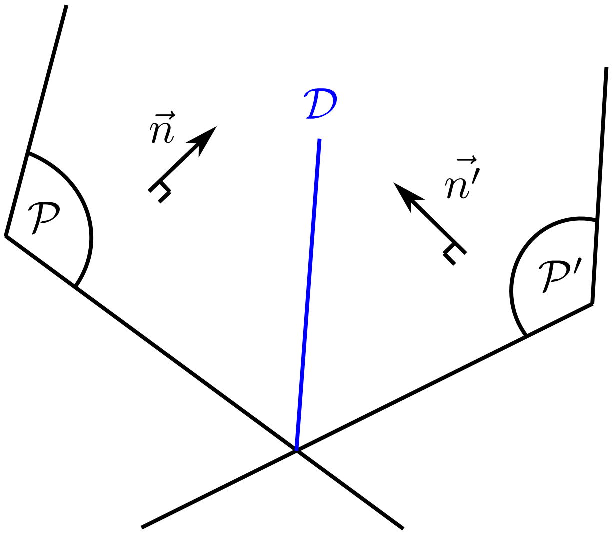
Exemple 3.15 :
On considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(1, 2, 0)$. Déterminer un système de représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan (ABC) passant par A.

3.5.2.2 Équation cartésienne

Définition 3.18 (Système de représentation cartésienne d'une droite) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. On appelle système de représentation cartésienne de $\mathcal{D}$ tout système de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

vérifié par tous les points de $\mathcal{D}$, où (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas colinéaires.



Proposition 3.27 (Existence d'un système de représentation cartésienne) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un ROND et $\mathcal{D}$ une droite, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace. Soit $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$. Alors :

- Si on a un système de représentation cartésienne de $\mathcal{D}$

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

  Alors les vecteurs $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ et $\vec{n'} = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath} + c'\vec{k}$ ne sont pas colinéaires et définissent deux vecteurs normaux à deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ distincts (qui ne sont donc pas parallèles) et dont l'intersection est la droite $\mathcal{D}$.

- Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ respectivement avec $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ et $\vec{n'} = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath} + c'\vec{k}$ non colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite $\mathcal{D}$ dont un système de représentation cartésienne est

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Proposition 3.28 (Lien représentation paramétrique et représentation cartésienne [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace et une droite de $\mathcal{D}$ de l'espace.

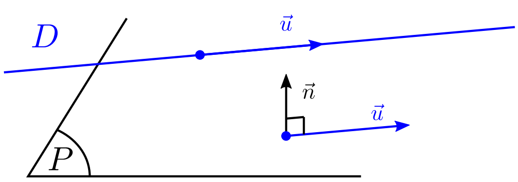
- Si
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$
est un système de représentation cartésienne de $\mathcal{D}$ et $\vec{n} = a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}$ et $\vec{n'} = a'\vec{\imath}+b'\vec{\jmath}+c'\vec{k}$, alors $\vec{n} \wedge \vec{n'}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- Si $\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, alors tout couple de vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ non colinéaires fournis des vecteurs normaux à des plans distincts contenants $\mathcal{D}$, par exemple $\vec{n} = \beta\vec{\imath} - \alpha\vec{\jmath}$ et $\vec{n'} = \gamma\vec{\imath} - \alpha\vec{k}$.

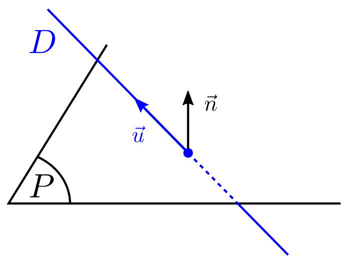
Exemple 3.16 :
Écrire l'équation du plan passant par la droite
$$D : \begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0 \\ x + 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$
et parallèle à la droite D' vérifiant $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}$.

3.5.2.3 Intersections

Proposition 3.29 (Intersections d'une droite et d'un plan) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace. Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et D une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$. Alors

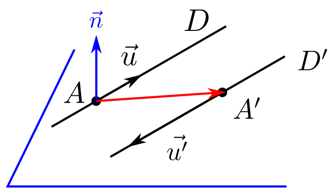
- Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, on a $P \parallel D$.
  - Si $D \cap P \neq \emptyset$, alors $D \subset P$
  - Si $D \cap P = \emptyset$, alors D est P sont parallèles
- Si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors P et D ne sont pas parallèles et $P \cap D$ est un point.

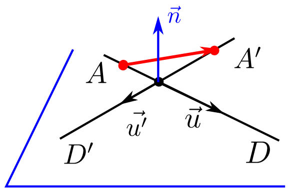


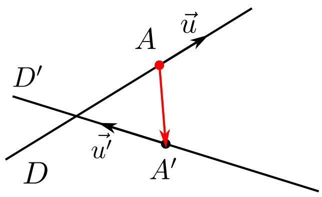


Proposition 3.30 (Intersections de deux droites) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère canonique de l'espace. Soit D et D' deux droites dirigée par $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ respectivement et soit $A \in D$ et $A' \in D'$. Alors

- Si $\det(\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'}) = 0$, alors les droites D et D' sont coplanaires.
  - Si $\vec{u} \wedge \vec{u'} = 0$, alors les droites sont parallèles.
    - Si $D \cap D' \neq \emptyset$ (ou si $A \in D'$ ou $A' \in D$), alors $D = D'$.
    - Sinon, les droites sont parallèles et non confondues et coplanaires. Un vecteur normal du plan qui les contient est $\vec{n} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AA'}$
  - Si $\vec{u} \wedge \vec{u'} \neq 0$, alors les droites sont sécantes et donc $D \cap D'$ est un point. Un vecteur normal du plan qui les contient est $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{u'}$.
- Si $\det(\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'}) \neq 0$, alors les droites ne sont pas coplanaires.







Démonstration :
Si $\det(\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'}) = 0$, alors la famille de vecteurs est liée et donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AA'} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u'}$. Et à partir de là, il est facile de faire la disjonction de cas. $\square$

Exemple 3.17 :
Soit les droites

$$d : \begin{cases} x = 1 + \lambda t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad d' : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -2\lambda + 2t \end{cases}$$

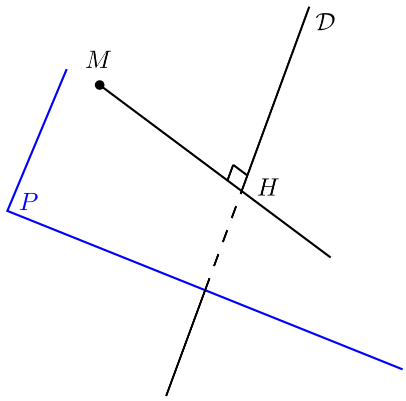
Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que les droites d et d' aient un unique point d'intersection.

3.5.2.4 Distance d'un point à une droite

Définition 3.19 (Projeté orthogonal d'un point sur une droite) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un ROND de l'espace, $\mathcal{D}$ une droite et M un point de l'espace.

Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M.

Remarque :
En fait, le projeté orthogonal correspond aussi à l'intersection du plan perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M avec $\mathcal{D}$.



Proposition 3.31 (Plan perpendiculaire à une droite) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un ROND et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ et soit $M \notin \mathcal{D}$.

Alors il existe un unique plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M. C'est le plan de vecteur normal $\vec{u}$ et passant par M.

Démonstration :
On pose $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$. Comme $\mathcal{D}$ est une droite, $\vec{u} \neq 0$. On note $\mathcal{P}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = 0\}$. Alors $\mathcal{P}_0$ est un espace vectoriel de dimension 2 (noyau d'une forme linéaire). C'est donc un plan vectoriel. Il est donc engendré par deux vecteurs $\vec{v}, \vec{w}$. Par définition du produit scalaire et de $\mathcal{P}_0$, on a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = \vec{u} \cdot \vec{w}$. On pose alors $\mathcal{P} = M + \mathcal{P}_0 = M + \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$. Alors $\mathcal{P}$ passe par M. Bien sûr. $\mathcal{P}$ est aussi orthogonal à $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}_0$.

Il reste à montrer l'unicité. La construction que l'on vient de faire nous fournit d'emblée l'unicité. Mais refaisons là à la main. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ passent par M et sont orthogonal à $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles. Et comme ces deux plans ont un point commun, ils sont donc confondus. $\square$

Proposition 3.32 (Distance d'un point à une droite [✓]) :
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un ROND, $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ une droite de l'espace et M un point de l'espace.

Alors, si H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$,

$$d(M, \mathcal{D}) = HM = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Exemple 3.18 :
On considère le plan $\mathcal{P} : mx + 2y + (m-1)z + 1 = 0$ et le plan $\mathcal{P}' : mx + y + z + m + 1 = 0$. Montrer que ces deux plans ne sont pas parallèles. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'intersections de ces deux plans. Déterminer, en fonction du paramètre m la distance du point $A(1, 1, 1)$ à la droite $\mathcal{D}$.