DM 9

Intégration

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 27 Mai 2025

1. **Application.**

   On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$ et la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   $$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$$

   où $f(t) = \frac{1}{1+t}$ définie sur $[0,1]$ et continue (en fait $\mathcal{C}^\infty$, mais la continuité seule nous suffit).

   Donc la suite (u_n) est la suite des sommes de Riemann de la fonction f. Elle converge donc vers $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   $$\begin{aligned}
   u_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k+2n} \\
   &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n-1 \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k+2n} + \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n-1 \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k+2n} \\
   &= \sum_{0 \leq 2p+1 \leq 2n-1} \frac{1}{2p+2n+1} + \sum_{0 \leq 2p \leq 2n-1} \frac{1}{2p+2n} \\
   &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+n} \\
   &= \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{2p+n} + \frac{1}{2} u_n \\
   &= v_n + \frac{1}{2} u_n
   \end{aligned}$$

   (c) On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n$. Or la suite (u_n) est convergente de limite $\ln(2)$, donc la sous suite (u_{2n}) est aussi convergente et de même limite. Puis (v_n) est alors une combinaison linéaire de deux suites convergente. Mais l'ensemble des suites réelles convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur lequel la limite est une forme linéaire. Donc la suite (v_n) est convergente de limite $\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2)$.

2. **Développement asymptotique d'une somme de Riemann.**

   Dans cette question, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0,1]$ à valeurs réelles.

(a) f étant une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est en particulier de classe $\mathcal{C}^3$, donc trois fois dérivable de dérivée troisième continue sur $[0,1]$. Donc $f^{(3)}$ existe et est continue sur $[0,1]$. Donc, par un corollaire du TVI, $f^{(3)}$ est bornée et atteint ses bornes sur $[0,1]$. En particulier, $|f^{(3)}|$ est bornée sur $[0,1]$ et donc, $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $|f^{(3)}(x)| \leq M$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

i. Soit $t \in [k/n, (k+1)/n]$. On peut alors appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre k/n et t. Mais nous allons repartir de la formule de Taylor avec reste intégral entre t et k/n :

$$f(t) = f(k/n) + f'(k/n)(t-k/n) + \frac{1}{2}f''(k/n)(t-k/n)^2 + \int_{k/n}^{t} \frac{f^{(3)}(x)}{2}(t-x)^2 dx$$

Ce qui nous donne

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \int_{k/n}^{t} \frac{f^{(3)}(x)}{2}(t-x)^2 dx \right|$$

Puis

$$\begin{aligned}
\left| \int_{k/n}^{t} \frac{f^{(3)}(x)}{2}(t-x)^2 dx \right| &\leq \int_{k/n}^{t} \frac{|f^{(3)}(x)|}{2}|t-x|^2 dx && \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq \int_{k/n}^{t} \frac{|f^{(3)}(x)|}{2}(t-x)^2 dx && \text{car } x \in [k/n,t] \subset [k/n,(k+1)/n] \subset [0,1] \\
&\leq \sup_{[0,1]} |f^{(3)}| \int_{k/n}^{t} \frac{(t-x)^2}{2} dx && \text{Croissance de l'intégrale} \\
&= M \left[-\frac{(t-x)^3}{6} \right]_{x=k/n}^{t} \\
&= \frac{M}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3
\end{aligned}$$

D'où l'on a

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3 \tag{1}$$

ii. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. La primitive de $t \mapsto \left(t - \frac{k}{n}\right)^q$ qui s'annule en k/n est $t \mapsto \int_{k/n}^{t} \left(x - \frac{k}{n}\right)^q dx$ par théorème fondamental de l'intégration. Et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{k/n}^{t} \left(x - \frac{k}{n}\right)^q dx = \left[\frac{1}{q+1}\left(x - \frac{k}{n}\right)^{q+1} \right]_{x=k/n}^{x=t} = \frac{(t-k/n)^{q+1}}{q+1} \tag{2}$$

iii. On a

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n}f(k/n) - \frac{1}{2n^2}f'(k/n) - \frac{1}{6n^3}f''(k/n) \right| \\
=&\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k/n}^{(k+1)/n} dt - f'\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t - \frac{k}{n}\right)dt - \frac{f''(k/n)}{2}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 dt \right| \\
& && \text{par (2)} \\
=&\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt \right| && \text{lin int} \\
\leq& \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt && \text{inéga tri}
\end{aligned}$$

$$\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3 dt \qquad \text{cf (1) et croiss int}$$
$$= \frac{M}{6}\left[\frac{1}{4}\left(t-\frac{k}{n}\right)^4\right]_{t=k/n}^{t=(k+1)/n} \qquad \text{par (2)}$$
$$= \frac{M}{24n^4}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f(t)dt - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right| \\
&= \left|\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n}f(k/n) - \frac{1}{2n^2}f'(k/n) - \frac{1}{6n^3}f''(k/n)\right)\right| && \text{Chasles} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n}f(k/n) - \frac{1}{2n^2}f'(k/n) - \frac{1}{6n^3}f''(k/n)\right| && \text{inéga tri} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{24n^4} && \text{cf } 2(b)iii \\
&= \frac{M}{24n^3}
\end{aligned}$$

(d) On définit la suite (ε_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \varepsilon_n = n^2\left(S_n(f) + \frac{1}{2n}S_n(f') + \frac{1}{6n^2}S_n(f'') - \int_0^1 f(t)dt\right)$$

D'après la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\varepsilon_n| \leq \frac{M}{24n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc (ε_n) est une suite convergente de limite nulle (par théorème des gendarmes).

On en déduit alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon_n}{n^2} = S_n(f) + \frac{1}{2n}S_n(f') + \frac{1}{6n^2}S_n(f'') - \int_0^1 f(t)dt \\
\iff &S_n(f) = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2} \qquad (3)
\end{aligned}$$

(e) On peut suivre le même raisonnement pour f' et f'' qui sont deux fonctions continues sur $[0,1]$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varepsilon'_n = n\left(S_n(f') + \frac{1}{2n}S_n(f'') - \int_0^1 f'(t)dt\right)$$

On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|n\varepsilon'_n| &= n\left|S_n(f') + \frac{1}{2n}S_n(f'') - \int_0^1 f'(t)dt\right| \\
&= n\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f''\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f'(t)dt\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}f''\left(\frac{k}{n}\right)-\int_{k/n}^{(k+1)/n}f'(t)dt\right)\right| && \text{Chasles}\\
&= n\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f'\left(\frac{k}{n}\right)+\left(t-\frac{k}{n}\right)f''\left(\frac{k}{n}\right)-f'(t)\right)dt\right| && \text{cf (2)}\\
&\leq n\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f'\left(\frac{k}{n}\right)+\left(t-\frac{k}{n}\right)f''\left(\frac{k}{n}\right)-f'(t)\right)dt\right| && \text{inéga tri}\\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(-\int_{k/n}^{t}f^{(3)}(x)(t-x)dx\right)dt\right| && \text{Taylor reste int}\\
&\leq n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\int_{k/n}^{t}|f^{(3)}(x)(t-x)|dxdt && \text{double inéga tri}\\
&\leq n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\int_{k/n}^{t}M(t-x)dxdt\\
&= Mn\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left[\frac{-(t-x)^2}{2}\right]_{x=k/n}^{x=t}dt\\
&= Mn\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2dt\\
&= Mn\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{6n^3}\\
&= \frac{M}{6n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0
\end{aligned}
$$

D'où $\varepsilon'_n=\frac{n\varepsilon'_n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et par définition de ε'_n,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad S_n(f')=\int_0^1 f'(t)dt-\frac{1}{2n}S_n(f'')+\frac{\varepsilon'_n}{n}. \tag{4}$$

On procède de la manière : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$\varepsilon''_n=S_n(f'')-\int_0^1 f''(t)dt$$

Alors, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon''_n| &= \left|S_n(f'')-\int_0^1 f''(t)dt\right|\\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f''(t)dt\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}f''\left(\frac{k}{n}\right)-\int_{k/n}^{(k+1)/n}f''(t)dt\right)\right| && \text{Chasles}\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f''\left(\frac{k}{n}\right)-f''(t)\right)dt\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(-\int_{k/n}^{t}f^{(3)}(x)dx\right)dt\right| && \text{Taylor reste int}\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\int_{k/n}^{t}|f^{(3)}|dxdt && \text{triple inéga tri}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \int_{k/n}^{t} M dx dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} M\left(t - \frac{k}{n}\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2n^2} \\
&= \frac{M}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

Donc $\varepsilon_n'' \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)dt + \varepsilon_n'' \tag{5}$$

(f) On en déduit donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
S_n(f) &= \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2} && \text{cf (3)} \\
&= \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}\left(\int_0^1 f'(t)dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n'}{n}\right) - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2} && \text{cf (4)} \\
&= \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)dt + \frac{1}{12n^2} S_n(f'') + \frac{2\varepsilon_n - \varepsilon_n'}{2n^2} \\
&= \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)dt + \frac{1}{12n^2}\left(\int_0^1 f''(t)dt + \varepsilon_n''\right) + \frac{2\varepsilon_n - \varepsilon_n'}{2n^2} && \text{cf (5)} \\
&= \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)dt + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)dt + \frac{\varepsilon_n'' + 12\varepsilon_n - 6\varepsilon_n'}{12n^2} \\
&= \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)dt + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)dt + \frac{\delta_n}{n^2}
\end{aligned}
$$

en posant $\delta_n = \frac{1}{12}(\varepsilon_n'' + 12\varepsilon_n - 6\varepsilon_n')$.

La suite (δ_n) est donc une combinaison linéaire de suites de limite nulle. C'est donc une suite convergente de limite nulle, par structure d'espace vectoriel et linéarité de la limite.

3. **Application**

(a) On reprend $f(t) = \frac{1}{1+t}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. On a alors

$$\forall t \in [0,1], \qquad f'(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$$

et

$$\forall t \in [0,1], \qquad f''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, on peut appliquer toute la question 2. Et donc on sait qu'il existe une suite (α_n) de limite nulle, telle que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
u_n &= S_n(f) \\
&= \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)dt + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)dt + \frac{\alpha_n}{n^2} \\
&= \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 - \frac{1}{2n}\Big[f(t)\Big]_0^1 + \frac{1}{12n^2}\Big[f'(t)\Big]_0^1 + \frac{\alpha_n}{n^2} \\
&= \ln(2) - \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{12n^2}\left(-\frac{1}{4} + 1\right) + \frac{\alpha_n}{n^2} \\
&= \ln(2) + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2}
\end{aligned}
$$

(b) On a donc

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n - \ln(2) &= \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n} + o(1/n) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}\end{aligned}$$

par caractérisation des équivalents par les o.

(c) Enfin, on a

$$\begin{aligned}v_n &= u_{2n} - \frac{1}{2}u_n \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + \frac{1}{8n} + \frac{1}{64n^2} - \frac{1}{2}\left(\ln(2) + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2}\right) + o(1/n^2) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{64n^2} + o(1/n^2)\end{aligned}$$

D'où

$$v_n - \frac{\ln 2}{2} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{64n^2} + o(1/n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{64n^2}$$

par caractérisation des équivalents.