



Interrogation 27

Intégration 2

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Taylor avec reste intégral.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$. Alors $\forall a, x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

2. Caractérisation des primitives complexes.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable. Alors F est une primitive de f sur I si, et seulement si, $\Re(F)$ est une primitive de $\Re(f)$ et $\Im(F)$ est une primitive de $\Im(f)$ sur I .

3. Définition des sommes de Riemann à gauche et à droite.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la n -ème somme de Riemann à gauche de f sur $[a, b]$, noté $R_n^-(f)$, et la n -ème somme de Riemann à droite de f sur $[a, b]$, noté $R_n^+(f)$, par

$$R_n^-(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right),$$

et

$$R_n^+(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

4. Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$ telle que $\exists M \geq 0$ tel que $\forall x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Alors $\forall a, x \in I$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

5. Convergence des sommes de Riemann.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$. Alors les sommes de Riemann $(R_n^-(f))$ et $(R_n^+(f))$ convergent vers l'intégrale de f sur $[a, b]$, i.e.

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

et

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

6. Changements de variable.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $u \in \mathcal{C}^1(J, I)$. Alors $\forall a, b \in J$,

$$\int_a^b f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx.$$

Exercice 2 :

Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$ puis étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{1/n}$.

On commence par calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \underbrace{1}_{\downarrow} \underbrace{\ln(1+x^2)}_{\downarrow} dx$.

$x \mapsto x \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ dérivée $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \ln(1+x^2) \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ par composition, de dérivée $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.
Donc, par intégration par partie,

$$\begin{aligned} I &= [x \ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx \\ &= \ln(2) - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \ln(2) - 2[x - \arctan(x)]_0^1 \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{1/n}$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n^2 + k^2) - 2 \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(n^2) + \ln(1 + (k/n)^2)) - 2 \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + (k/n)^2)\end{aligned}$$

On pose $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$. Alors $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$. Donc, par convergence des sommes de Riemann,

$$\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt = \ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Par continuité de l'exponentielle, on en déduit donc

$$u_n = e^{\ln(u_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2} = 2e^{\frac{\pi}{2} - 2}.$$