NOM :
Prénom :

Mardi 03 Juin 2025

Interrogation 28

Séries

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. TSSA.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite alternée. Si $(|u_n|)$ est décroissante et de limite nulle, alors $\sum u_n$ converge. Et de plus, dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.
2. Critère de D'Alembert.
3. Caractérisation de la convergence d'une suite par les séries télescopiques.
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (u_n) converge si, et seulement si, $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.
4. Convergence des séries de Riemann (et valeur de $\zeta(2)$).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. Et $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
5. Définition de la convergence absolue.
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ converge absolument.
6. Définition du produit de Cauchy.
Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On définit le produit de Cauchy de (u_n) et (v_n) par la suite (w_n) définit par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k.$$
7. Théorème de comparaison à une SATP (un seul cas).
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o(\sum_{k=n}^{+\infty} v_n)$. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o(\sum_{k=0}^{n} v_k)$.
8. Caractérisation de sommabilités des séries doubles.
Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$. La famille $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p\in\mathbb{N}} |a_{n,p}|$ converge et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{n,p}|$ converge. Et dans ce cas
$$\sum_{n,p\in\mathbb{N}} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}.$$

Exercice 2 :
On pose $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n(\alpha) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k-\alpha)}{\alpha^n n!}$. Étudier, en fonction du paramètre α, la nature de $\sum v_n(\alpha)$.

On note tout d'abord que $\forall \alpha \notin \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n(\alpha) \neq 0$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \forall n > \alpha, v_n(\alpha) = 0$.
En particulier, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(\alpha)$ converge.
Soit $\alpha \notin \mathbb{N}$. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{v_{n+1}(\alpha)}{v_n(\alpha)}\right| = \frac{|n-\alpha|}{|\alpha|(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{|\alpha|}.$$
Donc, par le critère de D'Alembert, si $|\alpha| > 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(\alpha)$ converge absolument, et si $|\alpha| < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(\alpha)$ diverge grossièrement.

De plus, comme étudier dans le premier cas, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(1) = 0$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(1)$ converge. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(-1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(-k-1)}{(-1)^n n!} = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(-1)$ diverge grossièrement.

Finalement, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(\alpha)$ converge si, et seulement si, $\alpha \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.