DS 11
Intégration - Séries - Espaces Préhilbertiens

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 04 Juin 2025

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Étude d'une fonction intégrale) :
Les différentes parties sont largement indépendantes.

Dans tous le problème :

- f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.
- F désigne l'application $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

Partie I : Résultats préliminaires

1. **Étude de** f.
   (a) Étudier la fonction f puis tracer l'allure de sa courbe représentative (C_f) en indiquant les informations essentielles.
   (b) Donner le développement limité à l'ordre 8 en 0 de f.
   (c) Donner les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \{1, \dots, 8\}$.
2. **Étude de** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite convergente ?
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$.
   (d) Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge (on se contentera, pour le moment, d'un intervalle ouvert).

Partie II : Intégrales de Wallis

Dans cette partie, si $n \in \mathbb{N}$, I_n désigne l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n dt$.

3. Calculer I_0 et I_1.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
6. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
8. Montrer que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2}a_n$ et $I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$.
10. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n}$.
    (b) Calculer la limite des suites de termes général $\frac{I_{n-2}}{I_n}$, $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ et en déduire celle de terme général nI_n^2.
    (c) Donner un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
11. (a) En déduire que le terme a_n est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ quand n tend vers $+\infty$.
    (b) Donner la nature des séries de terme général
        i. a_n
        ii. $\frac{a_n}{4n+1}$
        iii. $(-1)^n a_n$
        iv. $\frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$
    (c) Que peut-on conclure pour l'intervalle de convergence de la série $\sum a_n x^n$ trouver à la question 2d ?

Partie III : Étude de F

On note (C) la courbe représentative de F dans un repère orthonormée du plan.

12. **Étude globale de** F.
    (a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
    (b) Donner le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
    (c) Montrer que F est impaire.
    (d) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $F(x) - F(1) \leq 1 - \frac{1}{x}$.
    (e) On définit $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. On notera α cette limite, si elle existe. Déduire de ce qui précède que α existe.
13. **Étude locale de** F
    (a) Donner le développement limité de F à l'ordre 9 en 0.
    (b) Donner une équation de la tangente T à (C) en 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0.
14. **Lien avec** α
    (a) (i) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) - F(1) = F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)$.
        (ii) En déduire que $\alpha = 2F(1)$.
    (b) (i) Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge.
        (ii) Montrer que $\alpha \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq \alpha + 1$.

Problème 2 (Étude d'un endomorphismes de polynômes) :
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. (a) Justifier que

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)dt \end{array}$$

est un produit scalaire sur E.

(b) Justifier que $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P, Q) = \langle XP|Q\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

2. On suppose qu'il existe un endomorphisme φ de E_n tel que

$$\forall P, Q \in E_n \;\; \langle P|\varphi(Q)\rangle = \Phi(P, Q).$$

(a) Montrer que, pour tout $Q \in E_n$, $\varphi(Q) - XQ$ est orthogonale à tout $P \in E_n$.

(b) Montrer que si $\deg(Q) \leq n - 1$, alors $\varphi(Q) = XQ$.

(c) On se place dans le cas $n = 2$. On vient de voir que $\varphi(1) = X$ et $\varphi(X) = X^2$. Posons $\varphi(X^2) = aX^2 + bX + c$.

En exprimant le fait que $\varphi(X^2) - X^3$ est orthogonal à 1, X et X^2, montrer que $\varphi(X^2) = \frac{3}{5}X$.

(d) Former la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E_2 et calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de $M - \lambda I_3$.

(e) En déduit les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M - \lambda I_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

On admettra dans la suite que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un endomorphisme unique de E_n tel que $\forall P, Q \in E_n$, $\Phi(P, Q) = \langle P|\varphi(Q)\rangle$.

3. Montrer que $\forall P, Q \in E_n$, $\langle P|\varphi(Q)\rangle = \langle \varphi(P)|Q\rangle$. *On dit alors que φ est un endomorphisme de E_n symétrique.*

4. On admet qu'il existe une base orthonormale $(U_0, \dots, U_n)$ de E_n et une famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ de scalaires tels que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\varphi(U_k) = \alpha_k U_k$.

(a) Montrer que $\forall P, Q \in E_n$, $\Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle P|U_k\rangle \langle Q|U_k\rangle$.

(b) Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $|\alpha_k| < 1$.

5. On pose, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\gamma_k = \langle 1|U_k\rangle$.

(a) Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\left\langle X^k \middle| U_i \right\rangle = \alpha_i^k \gamma_i$.

(b) En déduire que, $\forall P \in E_n$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\langle U_i|P\rangle = \gamma_i \widetilde{P}(\alpha_i)$.

(c) Montrer que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\gamma_i \widetilde{U_i}(\alpha_i) \neq 0$. En déduire que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\gamma_i \neq 0$.

(d) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p + 1 = \mathrm{Card}(\{\alpha_i,\ 0 \leq i \leq n\})$. On réindexe les α_i de manière que les $p + 1$ premiers soient deux à deux distincts. Ainsi, pour tout $j > p$, α_j est égal à l'un des α_i pour un certain $i \leq p$.

On pose $R_n(X) = \prod_{i=0}^{p}(X - \alpha_i)$.

En considérant les produits scalaires $\langle U_i|R_n\rangle$, montrer que les réels α_i sont deux à deux distincts. En déduire que R_n est de degré $n + 1$.

(e) On pose

$$\forall j \in \{0, \dots, n\},\; L_j(X) = \frac{R_n(X)}{X - \alpha_j} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (X - \alpha_k).$$

Montrer que pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, $\exists \mu_j \in \mathbb{R}$ tel que $U_j = \mu_j L_j$. En déduire

$$\forall j \in \{0, \dots, n\},\; \mu_j \gamma_j \widetilde{L_j}(\alpha_j) = 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma_j^2 = \frac{\langle 1|L_j\rangle}{\widetilde{L_j}(\alpha_j)}.$$