



DS 11

Intégration - Séries - Espaces Préhilbertiens

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 04 Juin 2025

Problème 1 (Étude d'une fonction intégrale (Extrait E3A PC 2011 Maths A)) :

On rappelle :

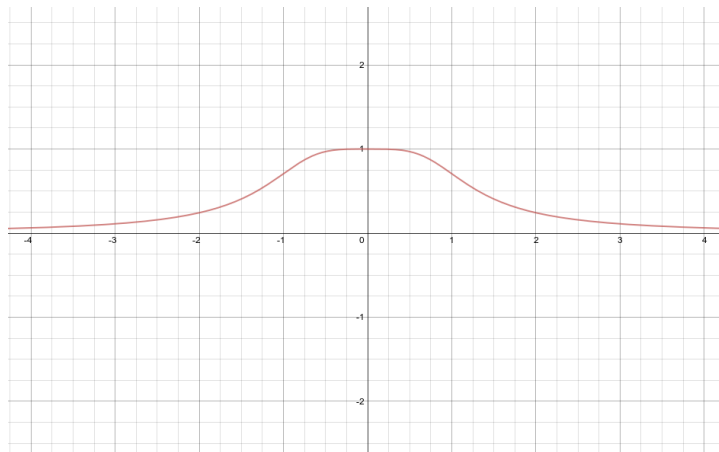
- f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.
- F désigne l'application $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
- $\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

Partie I : Résultats préliminaires

1. Étude de f .

(a) f est définie sur $\mathbb{R}$ et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition. Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-2x^3}{(1+x^4)^{3/2}}$. D'où le tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	0	1	0



(b) On a $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$. D'où

$$\sqrt{1+x^4} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{8} + o(x^8)$$

et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + x^4/2 - x^8/8 + o(x^8)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - (x^4/2 - x^8/8) + (x^4/2 - x^8/8)^2 + o(x^8) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8) \end{aligned}$$

(c) Comme $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la formule de Taylor-Young nous donne

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^8 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^8).$$

D'où l'on déduit, par unicité du développement limité en 0,

$$\begin{array}{ll} f'(0) = 0 & f^{(5)}(0) = 0 \\ f''(0) = 0 & f^{(6)}(0) = 0 \\ f'''(0) = 0 & f^{(7)}(0) = 0 \\ f^{(4)}(0) = -12 & f^{(8)}(0) = 3 \times 7! = 15120 \end{array}$$

2. Étude de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} > 0$. Et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq 1$$

Donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante. Donc par théorème de la limite monotone, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} \frac{1}{4^n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} = a_n$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est une série convergente car la suite est stationnaire en 0 (et sa somme vaut 1). Supposons maintenant $x \neq 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n x^n \neq 0$. Et

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{2n+1}{2(n+1)} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$$

grâce au calcul fait à la question (2c).

La règle de D'Alembert nous dit alors que, si $|x| < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge absolument et si $|x| > 1$, alors la série est grossièrement divergente.

Donc la série converge absolument pour tout $x \in]-1, 1[$. Et la règle de D'Alembert ne nous permet pas de conclure pour les bornes de l'intervalle.

Partie II : Intégrales de Wallis

On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ces intégrales sont bien définies puisque $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On a donc

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n dt$$

On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$. C'est un changement de variable affine, donc $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et bijectif vérifiant $dx = -dt$. Et donc on a

$$I_n = \int_{\pi/2}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^n (-dx) = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx$$

puisque $\forall y \in \mathbb{R}, \cos(\pi/2 - y) = \sin(y)$.

5. On sait que $\forall t \in [0, \pi/2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \sin(t)^n \geq 0$. Donc, par positivité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.

Mais d'autre part, pour $t = \pi/4$ par exemple, $\forall n \in \mathbb{N}, \sin(\pi/4)^n = \frac{1}{2^{n/2}} \neq 0$. Donc la fonction est positive et non identiquement nulle, donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$. Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a $\cos(t)^{n+1} \leq \cos(t)$ puisque $0 \leq \cos(t) \leq 1$. On en déduit donc, par croissance de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \leq I_n$$

Donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Mais comme elle est minorée (strictement) par 0, le théorème de la limite monotone nous assure la convergence de (I_n) .

7. Soit $n \geq 2$. On a $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \times \cos(t)^{n-1} dt$. On effectue une intégration par partie avec les fonction $u(t) = \cos(t)^{n-1}$ et $v(t) = \sin(t)$ qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et vérifient $u'(t) = -(n-1) \sin(t) \cos(t)^{n-2}$ et $v'(t) = \cos(t)$. Donc

$$\begin{aligned} I_n &= [\sin(t) \cos(t)^{n-1}]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin(t)^2 \cos(t)^{n-2} dt \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(t)^2) \cos(t)^{n-2} dt \end{aligned}$$

puisque $n-1 \geq 1$.

On a donc

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

D'où

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \tag{1}$$

8. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)I_{n+1}I_n = nI_{n-1}I_n$$

Donc la suite $((n+1)I_n I_{n+1})$ est constante et égale à $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

9. On pourrait répondre à la question par récurrence. Mais on va changer de méthode. C'est plus joli. On a déjà calculé que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

à la question (2d) par exemple. Et d'autre part, grâce à la relation (1), on a

$$\forall n \geq 2, 2nI_{2n} = (2n-1)I_{2n-2}$$

c'est à dire, $\forall n \in \mathbb{N}, (2n+2)I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n}$. On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Donc la suite $(\frac{I_{2n}}{a_n})$ est une suite constante égale à son premier terme $\frac{I_0}{a_0} = \frac{\pi}{2}$. Et donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{\pi}{2}a_n$.

De même, la relation (1) nous permet d'avoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, (2n+2)I_{2n+1} = (2n+3)I_{2n+3}$$

ce qui nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{I_{2n+3}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{2n+1}{2n+3} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Donc la suite $((2n+1)a_n I_{2n+1})$ est constante égale à sa première valeur $a_0 I_1 = 1$. On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$$

10. (a) On sait que la suite (I_n) est décroissante. Donc $\forall n \geq 2$,

$$I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$$

Et comme $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$, on a donc,

$$\forall n \geq 2, 1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n}$$

(b) D'après la relation (1), on a

$$\forall n \geq 2, \frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et donc, par théorème des gendarmes, $\frac{I_{n-1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Et enfin, on a

$$nI_n^2 = nI_n I_{n-1} \times \frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{\pi}{2} \frac{I_n}{I_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

(c) Comme $\frac{\pi}{2} \neq 0$, on a donc $nI_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ et donc $I_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$.

Comme (I_n) est une suite strictement positive, on peut composer pas la racine et on obtient donc

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

11. (a) On a montré à la question précédente que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Donc $I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. Or $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{\pi}{2}a_n$.

Donc $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

(b) i. On vient de voir que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$. Or $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une SATP divergente par Riemann, donc $\sum a_n$ diverge également, par comparaison de SATP.

ii. On a alors

$$\frac{a_n}{4n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{\pi}n^{3/2}}$$

et la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une SATP convergente par Riemann. Donc la série $\sum \frac{a_n}{4n+1}$ converge également par comparaison à une SATP

iii. La série $\sum (-1)^n a_n$ ne converge pas absolument. Si elle converge, ce n'est que simplement. Comme (a_n) est une suite strictement positive, la série $\sum (-1)^n a_n$ est donc une série alternée.

Par ailleurs, $|(-1)^n a_n| = a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1$. Donc la suite (a_n) est décroissante.

On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. On alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

par décroissance de la suite (a_n) . Donc la suite (S_{2n}) est décroissante. Et

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$$

toujours par décroissance de la suite (a_n) . Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.

Et

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergente et de même limite.

Finalement, par définition de la convergence d'une série, la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

iv. On sait que la série $\sum \frac{a_n}{4n+1}$ est convergente. Donc la série $\sum \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ converge absolument, donc elle converge.

(c) On sait que la série $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$ par la règle de D'Alembert. Mais la série $\sum a_n$ est divergente. Donc la série $\sum a_n x^n$ ne converge pas pour $x = 1$. Et la série $\sum (-1)^n a_n$ converge. Donc finalement, la série $\sum a_n x^n$ converge si et seulement si $x \in [-1, 1[$.

Partie III : Étude de F

On note (C) la courbe représentative de F dans le plan orthonormée.

12. Étude globale de F

(a) On sait que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, par théorème fondamental de l'intégration, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$ (c'est la primitive de f qui s'annule en 0).

Or on a prouvé en début de problème que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc F' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} > 0$ donc la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) F est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en l'origine. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

On effectue le changement de variable affine $u = -t$ qui est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Et

$$F(-x) = \int_0^x \frac{-du}{\sqrt{1+(-u)^4}} = - \int_0^x \frac{du}{1+u^4} = -F(x)$$

Donc la fonction F est impaire.

(d) Soit $x \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} F(x) - F(1) &= \int_0^x f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \\ &= \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \end{aligned}$$

par Chasles

$$\begin{aligned}
&\leq \int_1^x \frac{dt}{t^2} && \text{croissance de l'intégrale} \\
&= \left[-\frac{1}{t} \right]_{t=1}^{t=x} && \text{et } \forall t \in [1, x], 1 + t^4 \geq t^4 \\
&= 1 - \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

(e) Comme $\forall x \geq 1, 1 - \frac{1}{x} \leq 1$, on en déduit donc que F est majorée sur $[1, +\infty[$. Mais comme elle est également croissante, le théorème de la limite monotone nous permet de savoir que F converge en $+\infty$. Autrement dit, $\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe.

13. Étude locale de F

(a) On a vu à la question 1b que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^4}{4} + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8)$$

D'où, par intégration,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + x - \frac{1}{20}x^5 + \frac{3}{72}x^9 + o(x^9) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{20}x^5 + \frac{3}{72}x^9 + o(x^9)$$

(b) On déduit du développements limités de F en 0 et du fait qu'elle est dérivable par théorème fondamental de l'intégration, que la tangente à la courbe de F en 0 est d'équation

$$T : y = x$$

On a aussi $f(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{20}x^5 + \frac{3}{72}x^9 + o(x^9) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{20}x^5$. Donc $f(x) - x$ est du même signe que $-x^5/20$ au voisinage de 0. Donc f est sous sa tangente à droite de 0 et au dessus de sa tangente à gauche de 0.

14. Lien avec α

(a) i. Soit $x > 0$. On a $F(x) - F(1) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt = \int_1^x f(t)dt$ par la relation de Chasles. On effectue alors le changement de variable $y = \frac{1}{t}$ qui est un changement de variable $\mathcal{C}^1$ (et bijectif) sur le segment $[1, x]$ si $x \geq 1$ ou sur le segment $[x, 1]$ si $0 < x \leq 1$. On a $dt = -\frac{dy}{y^2}$. Et donc

$$\begin{aligned}
F(x) - F(1) &= \int_1^{1/x} f(1/y)(-\frac{dy}{y^2}) \\
&= \int_{1/x}^1 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{y^4}}} \frac{dy}{y^2} \\
&= \int_{1/x}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^4}} \\
&= \int_{1/x}^0 f(y)dy + \int_0^1 f(y)dy \\
&= \int_0^1 f(y)dy - \int_0^{1/x} f(y)dy \\
&= F(1) - F(1/x)
\end{aligned}$$

ii. On en déduit donc que $\forall x > 0, F(x) = 2F(1) - F(1/x)$. Par ailleurs, F est une fonction continue en 0 donc, par caractérisation de la continuité par les limites, $F(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} F(0) = 0$ par définition de F . Puis, par composition dans les limites, $F(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Par conséquent, $2F(1) - F(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2F(1)$. On en déduit donc $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2F(1)$. On en déduit donc $\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2F(1)$ par définition de α .

(b) i. On a $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Donc $\sum f(n)$ converge par comparaison de SATP et par séries de Riemann.

ii. La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut intégrer chacun des termes de chacune de ces inégalités. Et la croissance de l'intégrale nous donne alors, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) = \int_n^{n+1} f(n)dt$$

En sommant alors ces inégalités et en utilisant la relation de Chasles, on obtient, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N f(n+1) = \sum_{n=1}^{N+1} f(n) \leq \int_0^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=0}^N f(n) \quad (2)$$

En faisant un petit décalage, on obtient également, $\forall N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N f(n) &\leq \int_0^N f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \\ \implies \forall N \geq 1, \sum_{n=0}^N f(n) &\leq 1 + \int_0^N f(t)dt = F(N) + 1 \quad \text{car } f(0) = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Mais F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ qui converge vers α en $+\infty$, donc le théorème de la limite monotone nous permet d'avoir $\forall x \geq 0$, $F(x) \leq \alpha$.

Ainsi, $\forall N \geq 1$, on a $\sum_{n=0}^N f(n) \leq 1 + F(N) \leq 1 + \alpha$, où $1 + \alpha$ est indépendant de N .

Par ailleurs, f est une fonction strictement positive. Donc la série $\sum f(n)$ est une série à termes positifs donc les sommes partielles sont majorés. Le critère de convergence des séries à termes positifs nous re-donne alors la convergence de la série $\sum f(n)$ (mais pas la somme).

En reprenant l'inégalité de droite de (2) et l'inégalité de gauche de (3), on trouve l'inégalité, $\forall N \geq 1$,

$$F(N+1) \leq \sum_{n=0}^N f(n) \leq 1 + F(N)$$

On sait maintenant que chacune des trois suites intervenant dans cette inégalité sont convergentes. Comme le passage à la limite conserve les inégalités larges, en passant à la limite, on a donc

$$\alpha \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq 1 + \alpha$$

Problème 2 :

1. (a) C'est une question de cours.

Le produit polynomial est bilinéaire et l'intégrale est linéaire, donc $(P, Q) \mapsto \langle P|Q \rangle$ est bilinéaire. La commutativité du produit polynomial donne la symétrie. La positivité de l'intégrale fournit la positivité de ce qui sera bientôt un produit scalaire. Et le caractère défini provient du fait que l'intégrale nulle d'une fonction continue de signe constant entraîne la nullité sur l'intervalle de la fonction. Et un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

(b) Soit $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Phi(\lambda P + Q, R) = \langle X(\lambda P + Q)|R \rangle = \lambda \langle XP|R \rangle + \langle Q|R \rangle = \lambda \Phi(P, R) + \Phi(Q, R)$$

Donc Φ est linéaire à gauche.

$$\Phi(P, \lambda Q + R) = \langle XP | \lambda Q + R \rangle = \lambda \langle XP | Q \rangle + \langle XP | R \rangle = \lambda \Phi(P, Q) + \Phi(P, R)$$

Donc Φ est linéaire à droite. Et donc Φ est bilinéaire.

Puis

$$\Phi(P, Q) = \langle XP | Q \rangle = \int_{-1}^1 x \tilde{P}(t) \tilde{Q}(t) dt = \langle P | XQ \rangle = \langle XQ | P \rangle = \Phi(Q, P).$$

Donc Φ est symétrique.

2. On suppose $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E_n)$ tel que $\forall P, Q \in E_n, \langle P | \varphi(Q) \rangle = \Phi(P, Q)$.

(a) Soit $P, Q \in E_n$. Alors

$$\begin{aligned} \langle P | \varphi(Q) - XQ \rangle &= \langle P | \varphi(Q) \rangle - \langle P | XQ \rangle && \text{linéarité à droite} \\ &= \Phi(P, Q) - \Phi(Q, P) && \text{def } \Phi \text{ et } \varphi \\ &= 0 && \Phi \text{ symétrique} \end{aligned}$$

Donc $\forall Q \in E_n, (\forall P \in E_n, \varphi(Q) - XQ \perp P)$.

(b) Soit $Q \in E_n, \deg(Q) \leq n-1$. On a toujours $\varphi(Q) - XQ \in E_n^\perp$ d'après la question précédente. En particulier, comme $\varphi \in \mathcal{L}(E_n), \deg(\varphi(Q)) \leq n$ et $\deg(XQ) \leq n$. Donc $\varphi(Q) - XQ \in E_n$. Et donc $(\varphi(Q) - XQ) \perp (\varphi(Q) - XQ)$. Autrement dit, $\|\varphi(Q) - XQ\| = 0$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire. Et donc $\varphi(Q) = XQ$.

(c) On suppose $n = 2$. D'après la question précédente, on a $\varphi(1) = X \times 1 = X$ et $\varphi(X) = X \times X = X^2$. Et $\varphi \in \mathcal{L}(E_2)$, donc $\varphi(X) = aX^2 + bX + c$.

On a toujours $\varphi(X^2) - X^3$ orthogonal à 1, X et X^2 . Ce qui s'écrit :

$$\int_{-1}^1 (at^2 + bt + c - t^3) dt = \int_{-1}^1 (at^3 + bt^2 - t^4) dt = \int_{-1}^1 (at^4 + bt^3 + ct^2 - t^5) dt = 0$$

ce qui donne $\frac{a}{3} + c = \frac{b}{3} - \frac{1}{5} + \frac{a}{5} + \frac{c}{3} = 0$. La résolution du système fournit $a = c = 0$ et $b = 3/5$.

Et donc $\varphi(X^2) = \frac{3}{5}X$.

(d) D'après la question précédente, on a

$$M = \text{Mat}_{(1, X, X^2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 3/5 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -\lambda & 3/5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} && \text{dvpmt selon première ligne} \\ &= -\lambda(\lambda^2 - \frac{3}{5}). \end{aligned}$$

(e) Et donc, par caractérisation de l'inversibilité par le déterminant, $M - \lambda I_3 \notin \text{GL}_3(\mathbb{R}) \iff \lambda \in \{0, \sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}\}$.

3. Soit $P, Q \in E_n$. Alors

$$\begin{aligned} \langle P | \varphi(Q) \rangle &= \Phi(P, Q) && \text{def } \varphi \\ &= \Phi(Q, P) && \text{symétrie de } \Phi \\ &= \langle Q | \varphi(P) \rangle && \text{def } \varphi \\ &= \langle \varphi(P) | Q \rangle && \text{symétrie du produit scalaire} \end{aligned}$$

et donc φ est un endomorphisme symétrique de E_n .

4. Soit $(U_0, \dots, U_n)$ base orthonormale telle que $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \exists \alpha_k \in \mathbb{R}, \varphi(U_k) = \alpha_k U_k$.

(a) Soit $P, Q \in E_n$. Comme $(U_0, \dots, U_n)$ est une BON de E_n , on a $P = \sum_{k=0}^n \langle P|U_k \rangle U_k$ et $Q = \sum_{k=0}^n \langle Q|U_k \rangle U_k$.
Alors

$$\begin{aligned}
 \Phi(P, Q) &= \langle P|\varphi(Q) \rangle && \text{def } \varphi \\
 &= \left\langle \sum_{i=0}^n \langle P|U_i \rangle U_i \left| \sum_{j=0}^n \langle Q|U_j \rangle \varphi(U_j) \right. \right\rangle && \text{linéarité } \varphi \\
 &= \left\langle \sum_{i=0}^n \langle P|U_i \rangle U_i \left| \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle Q|U_j \rangle U_j \right. \right\rangle && \varphi(U_k) = \alpha_k U_k \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle P|U_i \rangle \langle Q|U_j \rangle \langle U_i|U_j \rangle && \text{bilinéarité produit scalaire} \\
 &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle P|U_k \rangle \langle Q|U_k \rangle && (U_0, \dots, U_n) \text{ BON}
 \end{aligned}$$

(b) En reprenant la question précédente avec $P = Q = U_i$, on a

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \{0, \dots, n\}, |\alpha_i| &= |\alpha_i| \|U_i\|^2 \\
 &= \left| \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle U_i|U_k \rangle^1 \right| \\
 &= |\Phi(U_i, U_i)| \\
 &= \left| \int_{-1}^1 t \widetilde{U}_i(t)^2 dt \right| \\
 &\leq \int_{-1}^1 |t| \widetilde{U}_i(t)^2 dt \\
 &\leq \int_{-1}^1 \widetilde{U}_i(t)^2 dt && \text{croissance de l'intégrale} \\
 &= \|U_i\|^2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Supposons $\exists i \in \{0, \dots, n\}$ tel que $|\alpha_i| = 1$. On a alors que des égalités dans le raisonnement précédent. Et donc, en particulier,

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 |t| \widetilde{U}_i(t)^2 dt &= \int_{-1}^1 \widetilde{U}_i(t)^2 dt \iff \int_{-1}^1 (|t| - 1) \widetilde{U}_i(t)^2 dt = 0 && \text{linéarité intégrale} \\
 &\iff \forall t \in [-1, 1], (|t| - 1) \widetilde{U}_i(t)^2 = 0 && \text{intégrale nulle d'une fonction continue de signe constant} \\
 &\iff \forall t \in]-1, 1[, \widetilde{U}_i(t) = 0 \\
 &\iff U_i = 0 && \text{polynôme avec infinité de racines}
 \end{aligned}$$

Mais si $U_i = 0$, alors $(U_0, \dots, U_n)$ ne peut pas être une BON (perte de la norme 1 ou de la liberté). On a donc $\forall i \in \{0, \dots, n\}, |\alpha_i| \neq 1$.

D'où $\forall i \in \{0, \dots, n\}, |\alpha_i| < 1$.

5. On pose $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \gamma_k = \langle U_k|1 \rangle$.

(a) Pour $k = 1$, on a $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \langle X|U_i \rangle = \langle \varphi(1)|U_i \rangle = \langle 1|U_i \rangle = \langle 1|\alpha_i U_i \rangle = \alpha_i \langle 1|U_i \rangle = \alpha_i \gamma_i$.

Supposons $\exists k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \langle X^k|U_i \rangle = \alpha_i^k \gamma_i$. Alors

$$\langle X^{k+1}|U_i \rangle = \langle \varphi(X^k)|U_i \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle X^k | \varphi(U_i) \rangle && \varphi \text{ symétrique} \\
&= \langle X^k | \alpha_i U_i \rangle && \text{def } U_i \\
&= \alpha_i \langle X^k | U_i \rangle && \text{linéarité à droite} \\
&= \alpha_i \alpha_i^k \gamma_i && \text{HR} \\
&= \alpha_i^{k+1} \gamma_i
\end{aligned}$$

Et donc, par récurrence, $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall i \in \{0, \dots, n\}, \langle X^k | U_i \rangle = \alpha_i^k \gamma_i$.

(b) Soit $P \in E_n$. Alors $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\langle P | U_i \rangle &= \sum_{k=0}^n a_k \langle X^k | U_i \rangle && \text{linéarité à gauche} \\
&= \sum_{k=0}^n a_k \alpha_i^k \gamma_i && \text{cf question précédente} \\
&= \gamma_i \sum_{k=0}^n a_k \alpha_i^k \\
&= \gamma_i \tilde{P}(\alpha_i) && \text{def évaluation}
\end{aligned}$$

(c) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. D'après la question précédente, $\gamma_i \tilde{U}_i(\alpha_i) = \langle U_i | U_i \rangle = 1$. Et donc $\gamma_i \neq 0$ (sinon ☹️).

(d) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p+1 = \text{Card}(\{\alpha_i, 0 \leq i \leq n\})$. On pose $R_n(X) = \prod_{i=0}^p (X - \alpha_i)$.

Par construction, R_n est à racines simples et ses racines sont $\alpha_0, \dots, \alpha_p$.

Si $p < n$, alors $\deg(R_n) = p+1 \leq n$ et donc $R_n \in E_n$. Alors, d'après la question précédente, $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \langle U_i | R_n \rangle = \gamma_i \tilde{R}_n(\alpha_i) = 0$.

Or $(U_0, \dots, U_n)$ est une BON de E_n , donc $R_n(X) = \sum_{k=0}^n \langle R_n | U_k \rangle U_k = 0$. ☹️.

Et donc $p \geq n$. Sauf que $p \leq n$ par définition, et donc $p = n$. Et donc les α_i sont deux à deux distincts. Et donc aussi $\deg(R_n) = n+1$.

(e) On pose

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (X - \alpha_k)$$

Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Alors $\deg(L_j) = n$ car $\deg(R_n) = n+1$. Et donc $L_j \in E_n$. Donc $L_j = \sum_{k=0}^n \langle L_j | U_k \rangle U_k$. Mais,

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \langle L_j | U_k \rangle = \gamma_k \tilde{L}_j(\alpha_k)$$

Or $\forall k \neq j, \tilde{L}_j(\alpha_k) = 0$. Donc $L_j = \gamma_j \tilde{L}_j(\alpha_j) U_j$. Et $\gamma_j \tilde{L}_j(\alpha_j) \neq 0$. On pose alors $\mu_j = \frac{1}{\gamma_j \tilde{L}_j(\alpha_j)}$. Alors $U_j = \mu_j L_j$.

U_j étant de norme 1, on a

$$1 = \langle U_j | U_j \rangle = \mu_j \langle U_j | L_j \rangle = \mu_j \gamma_j \tilde{L}_j(\alpha_j)$$

(ce qui revient à utiliser la définition de μ_j). De plus,

$$\langle 1 | L_j \rangle = \gamma_j \tilde{L}_j(\alpha_j) \langle 1 | U_j \rangle = \gamma_j^2 \tilde{L}_j(\alpha_j)$$

d'après le début de la question.