NOM :
Prénom :

Mardi 10 Juin 2025

Interrogation 29

Espaces Préhilbertiens Réels

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'un produit scalaire.
Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On dit que $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si φ est bilinéaire, symétrique ($\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$), définie ($\forall x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \iff x = 0$) positive ($\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geq 0$).

2. Théorème de Pythagore.
Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonal. Alors $\| \sum_{k=1}^n x_k \|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$. Et si $n = 2$, alors (x_1, x_2) est orthogonal si, et seulement si, $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.

3. Identités remarquables.
Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $x, y \in E$. Alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$.

4. Identités de polarisation.
Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $x, y \in E$. Alors $4\langle x|y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$. Et $2\langle x|y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$.

5. Coordonnées et produit scalaire dans une BON.
Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E. Soit $x, y \in E$. Alors $x = \sum_{k=1}^n \langle x|e_k\rangle e_k$, $\langle x|y\rangle = \sum_{k=1}^n \langle x|e_k\rangle \langle y|e_k\rangle$ et $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x|e_k\rangle^2$.

6. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $x, y \in E$. Alors $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. Et $|\langle x|y\rangle| = \|x\|\|y\| \iff (x,y)$ liée.

7. Définition de l'orthogonal d'une partie.
Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $A \subset E$. On définit l'orthogonal de A, noté $A^\perp$, par $A^\perp = \{x \in E,\ \forall a \in A,\ \langle a|x\rangle = 0\}$.

8. Orthogonalité et sommes de sev.
Soit $(E, \langle | \rangle)$ espace préhilbertien réel. Soit F, G deux sev de E. Alors $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Si F, G de dimension finie, alors $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 2 :
Soit $T > 0$. Montrer que $(f,g) \mapsto \langle f|g\rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues T-périodiques.

Soit $f, g \in \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors

$$\langle f|g\rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt = \int_0^T g(t)f(t)dt = \langle g|f\rangle$$

par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$. Donc $\langle | \rangle$ est symétrique.

Soit $f, g, h \in \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \lambda f + g|h\rangle &= \int_0^T (\lambda f(t) + g(t))h(t)dt \\
&= \lambda \int_0^T f(t)h(t)dt + \int_0^T g(t)h(t)dt && \text{lin int} \\
&= \lambda \langle f|h\rangle + \langle g|h\rangle && \text{def } \langle | \rangle
\end{aligned}$$

Donc $\langle | \rangle$ est linéaire à gauche. Donc, par symétrie, $\langle | \rangle$ est bilinéaire.

Soit $f \in \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\langle f|f\rangle = 0$. Alors $\int_0^T f(t)^2 dt = 0$. Or $f^2 \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R})$ et positive. Donc $\forall t \in [0,T]$, $f(t) = 0$. Donc $f|_{[0,T]} = 0$. Or f est T-périodique. Donc $f = 0$.

Donc $\langle | \rangle$ est un forme bilinéaire définie positive. Donc $\langle | \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.