NOM :
Prénom :

Interrogation 30

Probabilités finies

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mardi 17 Juin 2025

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de deux événements indépendants.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé (fini), $A, B \subset \Omega$. On dit que les évènements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

2. Définition de l'indépendance mutuelle.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé (fini), soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des évènements de Ω. On dit que la famille $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants si, $\forall m \in \{1, \dots, n\}$, $\forall i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 < \dots < i_m$, $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^m A_{i_k}) = \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(A_{i_k})$.

3. Définition d'un système complet d'événements.
Soit Ω un univers (fini), et $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$. On dit que la famille d'événements $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements si $\bigcap_{i=1}^n A_i = \Omega$ et $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

4. Formule de Bayes
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé (fini), $A, B \subset \Omega$ tels que $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$. Alors
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

5. Construction d'une loi de probabilité.
Soit Ω un univers fini et $\forall \omega \in \Omega$, $p_\omega \in \mathbb{R}_+$. Si $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$, alors il existe une unique loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω tel que $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.

6. Définition d'événements incompatibles.
Soit Ω un univers (fini), $A, B \subset \Omega$. On dit que les événements A et B sont incompatibles, si $A \cap B = \emptyset$.

7. Formule des probabilités totales.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A_1, \dots, A_n, B \subset \Omega$ tels que $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements de Ω tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$. Alors
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

8. Loi binomiale.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, $\Omega = \{0, \dots, n\}$.
La loi binomiale sur $\{0, \dots, n\}$ est la loi de probabilité $\mathbb{P}$ définie par
$$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ \mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exercice 2 :
Dans un lycée général de banlieue parisienne à moitié professionnel, certains élèves portent claquettes-chaussettes en été (honte sur eux). Un élève de bac pro sur deux manque cruellement de goût vestimentaire (comprendre : porte des claquettes-chaussettes). En revanche, dans le général, seul 20% des élèves font des fautes de goût. Quelle est la probabilité pour qu'un élève qui pourrait se voir infliger un blâme par Christina Cordula soit en bac pro ?

Notons P l'évènement "l'élève est en bac Pro" et F l'évènement : "l'élève a fait une faute de goût". On a donc $\mathbb{P}(F|P) =$

NOM :
Prénom :

$1/2$ et $\mathbb{P}(F|\overline{P}) = 20\%$ et $\mathbb{P}(P) = 1/2$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P|F) &= \frac{\mathbb{P}(F|P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(F)} && \text{formule de Bayes} \\
&= \frac{\mathbb{P}(F|P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(F|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F|\overline{P})\mathbb{P}(\overline{P})} && \text{formule proba totale} \\
&= \frac{1/4}{1/4 + 10\%} \\
&= \frac{5}{5+2} \\
&= \frac{5}{7}
\end{aligned}$$

Donc un élève choisit au hasard faisant une faute de goût à 5 chances sur 7 d'être en bac pro.