NOM :
Prénom :

Mardi 24 Juin 2025

Lycée Loges

Interrogation 30

Variables Aléatoires

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Variance et espérance d'une loi de Bernoulli.
Soit $p \in [0,1]$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.

2. Définition de la variance.
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On définit la variance de X, par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)^2\right)$.

3. Définition de deux variables aléatoires indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. On dit que X et Y sont indépendantes (et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$) si $\forall A \subset X(\Omega)$, $\forall B \subset Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X \in A,\ Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

4. Inégalité de Markov.
Soit X une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Alors

$$\forall a \geq 0,\ \mathbb{E}(X) \geq a\mathbb{P}(X \geq a).$$

5. Définition d'un Schéma de Bernoulli.
Soit $p \in [0,1]$. Soit $X_1, \dots, X_n$ des VAIID suivant toutes une loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $S = \sum_{k=1}^n X_k$ est un schéma de Bernoulli.

6. Définition de l'espérance d'une variable aléatoire.
Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On définit l'espérance de X, noté $\mathbb{E}(X)$, par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

7. Formule de transfert.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω, $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

8. Espérance d'un produit de n variables aléatoires.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur Ω. Alors

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k).$$

Exercice 2 :
Soit $n \geq 2$. On considère des urnes $U_1, \dots, U_n$ de sorte que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, U_i contient i boules numérotées de 1 à i. On choisit une urne au hasard, puis une boule dans cette urne. On pose X le numéro de l'urne et Y celui de la boule tirée.

Déterminer la loi de X, la loi conjointe de X et Y, puis la loi marginale de Y.

On suppose les urnes indiscernables. Donc il y a équiprobabilité sur l'ensemble des urnes. Alors $X \sim \mathbb{U}(n)$.

$Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ car Y correspond au numéro de la boule tirée.

Soit $i, k \in \{1, \dots, n\}$. Si $i < k$, alors $\mathbb{P}(X = i,\ Y = k) = 0$ car il n'y a pas de boule numéro k dans l'urne i (l'urne i n'a que des boules jusqu'au numéro i).

Si $i \geq k$, alors $\mathbb{P}(X = i,\ Y = k) = \mathbb{P}(Y = k | X = i)\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{i} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{ni}$, car $\mathbb{P}(X = i) = 1/n > 0$.

D'où

$$\forall i, k \in \{1, \dots, n\},\ \mathbb{P}(X = i,\ Y = k) = \begin{cases} \frac{1}{ni} & i \geq k \\ 0 & i < k \end{cases}$$

On peut alors retrouver la loi marginale de Y : soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = k,\ X = i) && (\{X = i\})_{1 \leq i \leq n} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(Y = k,\ X = i) + \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}(Y = k,\ X = i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{ni} \\
&== \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}
\end{aligned}$$