DS 1
Révisions
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 14 Septembre 2022

Problème 1 :
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1+\ln(x)}{e^x-1}$.

1. *Question préliminaire :* Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $k : I \to \mathbb{R}$ strictement décroissante. Soit $a, b \in I$ tels que $k(a) < k(b)$.

Supposons $a \leq b$. Alors, par décroissance de k, $k(a) \geq k(b)$. Or $k(a) < k(b)$. Donc ☠. Donc $a > b$.

2. On a, par composition,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} & & \\ x & \mapsto & \ln(x) & & \\ & & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & y+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+\ln(x) \end{array}$$

De plus, encore par composition,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} & & & & \\ x & \mapsto & e^x & & & & \\ & & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R}^* & & \\ & & y & \mapsto & y-1 & & \\ & & & & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & & & z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{e^x-1} \end{array}$$

Puis, par produit, la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}^*$.

3. La fonction $x \mapsto 1+\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme de fonctions dérivables. La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par sommes de fonctions dérivables et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Puis,

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(e^x-1) - e^x(1+\ln(x))}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{e^x - 1 - xe^x(1+\ln(x))}{x(e^x-1)^2} \\ &= \frac{(1-x-x\ln(x))e^x - 1}{x(e^x-1)^2}. \end{aligned}$$

4. On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1-x-x\ln(x))e^x - 1 \end{array}$$

Autrement dit, g correspond au numérateur de $f'(x)$.

(a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x > 0,\ g'(x) = (-1-\ln(x)-1+1-x-x\ln(x))e^x = -(1+x+\ln(x)+x\ln(x))e^x.$$

(b) On pose $h : x \mapsto 1+x+\ln(x)+x\ln(x)$. On a donc, $\forall x>0$, $g'(x) = -h(x)e^x$. Et donc g' est du signe de h.

i. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Et

$$\forall x > 0,\ h'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln(x) + 1 = \frac{1}{x} + \ln(x) + 2.$$

ii. h' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x > 0,\ h''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

iii. On a

$$\forall x > 0,\ h'(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) + 2 = \frac{1+x\ln(x)}{x} + 2.$$

Or $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (limite connue de référence), donc $h'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

Puis, $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc, par sommes, $h'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

On a également, par somme,

$$h(x) = 1+x+\ln(x)+x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \quad \text{et} \quad h(x) = 1+x+\ln(x)+x\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

iv. On peut donc dresser le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
h'	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$h'(x)$			$+$		
h	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

v. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc continue. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, $h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Donc $0 \in \mathbb{R} = h(\mathbb{R}_+^*)$. Et donc, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $h(\alpha) = 0$.

D'autre part, h est strictement monotone et continue, donc h est une bijection par théorème de la bijection et donc α est unique.

On a $h(1) = 2$. Donc $\alpha \neq 0$ (puisque $h(\alpha) = 0$). On a donc $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$. Supposons $\alpha > 1$. Alors, par croissance stricte de h, on a $h(\alpha) = 0 > h(1) = 2$. ☠. donc $\alpha < 1$. Et donc $\alpha \in]0,1[$ puisque $\alpha > 0$.

(c) Par la limite de référence $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, on a $1-x-x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$. Or $e^x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, donc

$$g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

De plus, $1 - x - x\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et $e^x - \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc, par produit,

$$g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty.$$

(d) On peut donc faire le tableau de signes :

x	0		α		β		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0		$+$				
$g'(x)$		$+$	0		$-$				
g	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

(e) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier sur $]\alpha, +\infty[$. Donc en particulier, g est continue sur $]\alpha, +\infty[$. Or, d'après la question précédente, g est strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$ et $g(\alpha) > 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Donc, par théorème de la bijection, $\exists! \beta > \alpha$ tel que $g(\beta) = 0$.

(f) On a $g(1) = -1 < 0$. Donc $\beta \neq 1$. On a donc $\beta < 1$ ou $\beta > 1$.

Si $\beta > 1$, alors, par décroissance stricte de g sur $]\alpha, +\infty[$ et puisque $\beta, 1 \in]\alpha, +\infty[$, on a $g(\beta) = 0 < g(1) = -1$ ☠. Donc $\beta < 1$.

(g) On en déduit le tableau de signes :

x	0		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

5. On sait $e^x \xrightarrow[x\to0^+]{} 1^+$ (par continuité), donc $e^x - 1 \xrightarrow[x\to0^+]{} 0^+$. Et donc, par passage à l'inverse,

$$\frac{1}{e^x - 1} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty.$$

Or $1 + \ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$. Et donc, par produit, $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$.

Pour la limite en $+\infty$, il y a plusieurs façon de faire. Par exemple :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{e^x - 1} = \frac{1 + \ln(x)}{x}\frac{x}{e^x - 1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right)\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}}.$$

Or on a les limites de références

$$\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

D'où

$$\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \quad \text{et} \quad \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

En passant à l'inverse et en faisant le produit, on a donc

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right)\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

6. En rappelant que $\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{g'(x)}{x(e^x-1)^2}$ d'après la question 3. Et donc

x	0		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$x(e^x-1)^2$			$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	0

7. Par définition de β, on a

$$g(\beta) = 0 \iff (1-\beta-\beta\ln(\beta))e^{\beta} - 1 = 0 \iff e^{\beta} = \frac{1}{1-\beta-\beta\ln(\beta)}.$$

$(1-\beta-\beta\ln(\beta) \neq 0$ car sinon, on aurait $1=0)$. Et donc :

$$\begin{aligned}
f(\beta) &= \frac{1+\ln(\beta)}{e^{\beta}-1} \\
&= \frac{1+\ln(\beta)}{\frac{1}{1-\beta-\beta\ln(\beta)}-1} \\
&= \frac{(1+\ln(\beta))(1-\beta-\beta\ln(\beta))}{1-(1-\beta-\beta\ln(\beta))} \\
&= \frac{(1+\ln(\beta))(1-\beta-\beta\ln(\beta))}{\beta(1+\ln(\beta))} \\
&= \frac{1-\beta-\beta\ln(\beta)}{\beta} \\
&= \frac{1}{\beta e^{\beta}}
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Logique) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
2. $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ tel que $f(a) > f(b)$.
3. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n = c$. On peut l'écrire aussi : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

Exercice 3 (Logique) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ et $x < 0$.
2. $\forall \ell \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall A > 0$, $\exists x \geq A$ tel que $|f(x) - \ell| > \varepsilon$.

Exercice 4 (Modes de raisonnements) :

1. On utilise un raisonnement par analyse-synthèse. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $-4x = \sqrt{7x^2+1}$. Donc $x \leq 0$. Puis $16x^2 = 7x^2 + 1 \iff 9x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{3}$. Or $x \geq 0$. Donc $x = -1/3$.

Il reste à faire la synthèse, c'est-à-dire la vérification : si $x = -1/3$, alors $-4x = 4/3$ et

$$\sqrt{7x^2+1} = \sqrt{\frac{7}{9}+1} = \sqrt{\frac{16}{9}} = 4/3.$$

Finalement $-4x = \sqrt{7x^2+1} \iff x = -1/3$.

2. [Récurrences]

Soit $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

Alors $u_2 = u_0 + u_1 = 2$. Et $u_1^2 - u_0 u_2 = 1 - 2 = -1 = (-1)^1$.

Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^n$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} &= u_{n+1}^2 - u_n(u_n + u_{n+1}) && \text{def } u_{n+2} \\
&= u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_n u_{n+1} \\
&= u_{n+1}^2 - ((-1)^n + u_{n+1}u_{n-1}) - u_n u_{n+1} && \text{HR} \\
&= u_{n+1}^2 - (-1)^n - u_{n+1}u_{n-1} - u_n u_{n+1} \\
&= u_{n+1}^2 - (-1)^n - u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) && \text{def } u_{n+1} \\
&= u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} - u_{n+1}^2 \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^n$.

3. [Contrapositions]

Soit $a \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \implies a = 0$. On va raisonner par contraposition. On va donc montrer que $a \neq 0 \implies \exists \varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq a$.

Supposons donc $a \neq 0$. Alors $|a| > 0$. On pose $\varepsilon = |a|/2 > 0$. Alors $\varepsilon \leq |a|$.

Par conséquent, la contraposée de la réciproque est vraie, et donc, l'implication que nous voulions démontrer l'est également.

Exercice 5 (BONUX) :
On va raisonner par analyse-synthèse. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y$. On remarque alors, en prenant $x = y = 0$, $f(0)^2 = f(0)$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Si $f(0) = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(0) = f(0) + x$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 = x$. Ce qui est absurde. Donc $f(0) \neq 0$. Donc $f(0) = 1$.

Et enfin, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(0) = f(0) + x$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$.

Il reste à faire la synthèse, c'est-à-dire la réciproque. Soit $f : x \mapsto x + 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) &= (x+1)(y+1) && \text{def } f \\
&= xy + 1 + x + y \\
&= f(xy) + x + y && \text{def } f
\end{aligned}$$

On en déduit donc qu'il n'y a qu'une seule application solution du problème, et c'est l'application $f : x \mapsto x + 1$.