DS 1
Révisions

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 10 Septembre 2025

Le devoir dure 2h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 :
Ce problème tente d'étudier la fonction f d'expression $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{e^x-1}$.

1. *Question préliminaire :* Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $k : I \to \mathbb{R}$ strictement décroissante. Montrer que si $a, b \in I$ tels que $k(a) < k(b)$, alors $a > b$.
2. Donner le domaine de définition de f.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
4. On considère la fonction
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1-x-x\ln(x))e^x - 1 \end{array}$$
   (a) Justifier que g est dérivable et calculer sa dérivée.
   (b) On pose $h : x \mapsto 1 + x + \ln(x) + x\ln(x)$.
      i. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que $\forall x > 0,\ h'(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) + 2$.
      ii. Justifier que h' est dérivable et calculer h''.
      iii. Étudier les limites de h' et h.
      iv. En déduire le tableau de variations de h.
      v. Montrer que $\exists! \alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$, puis montrer que $\alpha \in]0, 1[$.
   (c) Étudier les limites g.
   (d) En déduire le tableau de variations de g.
   (e) Justifier qu'il existe $\beta > \alpha$ tel que $g(\beta) = 0$.
   (f) En déduire que $\beta < 1$.
   (g) En déduire le signe de g.

5. Étudier les limites f.
6. Déduire de ce qui précède le tableau de variations de f.
7. Montrer que
$$f(\beta) = \frac{1}{\beta e^{\beta}}.$$

Exercice 2 (Logique) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire les assertions suivantes avec des quantificateurs.

1. La fonction f est nulle.
2. La fonction f n'est pas croissante.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (*i.e.* constante à partir d'un certain rang).

Exercice 3 (Logique) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Donner la négation des assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f(x) \geq 0 \implies x \geq 0)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$ ou $f(x) \leq -1$.
3. $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0$, $\forall x \geq A$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Exercice 4 (Différents modes de raisonnements) :
Les questions se traitent avec des modes de raisonnements différents.

1. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$: $-4x = \sqrt{7x^2 + 1}$.
2. [Récurrence]
   Soit $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$.
3. [Contraposition]
   Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0$, $|a| < \varepsilon$, alors $a = 0$.

Exercice 5 (BONUX) :

Exercice à n'aborder que si plus de 75% du sujet a été (bien) abordé au moins.

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$