DM 1
Calcul Algébrique

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 16 Septembre 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ une racine n-ème de l'unité.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.
2. Calculer, pour $k \in \mathbb{Z}$, la somme $I_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk}$.
3. On pose pour $a, b \in \mathbb{R}$,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + bk) \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb)$$
Calculer $C_n + iS_n$ et en déduire les valeurs de C_n et S_n.
4. Cas particulier $n = 4$. On note pour $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $f(z) = (1 + z)^{4p}$.
   (a) Calculer directement $f(1) + f(\omega) + f(\omega^2) + f(\omega^3)$.
   (b) Recalculer $f(1) + f(\omega) + f(\omega^2) + f(\omega^3)$ à l'aide des $I_{4,k}$ avec $0 \leq k \leq 4p$.
   (c) En déduire que
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{4p}{4k} = 2^{2p-1} \left(2^{2p-1} + (-1)^p \right).$$
5. On reprend un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé jusqu'à la fin de l'énoncé. On pose $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j+k)^2}$. On rappel que, par division euclidienne de j par n, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \{0, \ldots, n-1\}$, tels que $j = an + b$.
6. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} I_{n,2k} = G_n \overline{G_n}$.
7. En déduire une expression simple de $|G_n|^2$ en fonction de la parité de n.
8. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^{np} = n \sum_{k=0}^{p} \binom{np}{nk}$ (on pourra utiliser la question 2).
9. Retrouver plus rapidement la valeur de $\sum_{k=0}^{p} \binom{4p}{4k}$ calculé à la question 4c