DM 1

Calcul Algébrique

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 16 Septembre 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

1. Si $n = 1$, la somme vaut 1. On suppose $n \geq 2$. On a déjà vu dans un exemple du cours (donc à refaire) que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$. Calculons le produit :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k &= \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} \\
&= \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= e^{\frac{2i\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= e^{2i\pi(n-1)} \\
&= (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On suppose $k \not\equiv 0\ [n]$, donc $\omega^k \neq 1$ et

$$\begin{aligned}
I_{n,k} &= \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} \\
&= \frac{1 - \omega^{nk}}{1 - \omega^k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $k \equiv 0\ [n]$, alors $I_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n$.

Moralité :

$$I_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \not\equiv 0\ [n] \\ n & \text{si } k \equiv 0\ [n] \end{cases}$$

3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Supposons d'abord $b \not\equiv 0\ [2\pi]$. Alors

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + bk) + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + bk) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \big(\cos(a + bk) + i \sin(a + bk)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+bk)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{ia}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ibk} \\
&= e^{ia}\frac{1-e^{ibn}}{1-e^{ib}} \\
&= e^{ia}\frac{e^{ibn/2}(e^{-ibn/2}-e^{ibn/2})}{e^{ib/2}(e^{-ib/2}-e^{ib/2})} \\
&= e^{i(a+b(n-1)/2)}\frac{\sin(bn/2)}{\sin(b/2)}
\end{aligned}
$$

Et dans le cas où $b \equiv 0\ [2\pi]$, on a

$$
\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\big(\cos(a) + i\sin(a)\big) \\
&= ne^{ia}
\end{aligned}
$$

On en déduit donc :

$$
C_n = \begin{cases} n\cos(a) & \text{si } b \equiv 0\ [2\pi] \\ \frac{\cos(a+(n-1)b/2)\sin(bn/2)}{\sin(b/2)} & \text{si } b \not\equiv 0\ [2\pi] \end{cases}
$$

et

$$
S_n = \begin{cases} n\sin(a) & \text{si } b \equiv 0\ [2\pi] \\ \frac{\sin(a+(n-1)b/2)\sin(bn/2)}{\sin(b/2)} & \text{si } b \not\equiv 0\ [2\pi] \end{cases}
$$

4. On prend $n = 4$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $f(z) = (1+z)^{4p}$ et $F = f(1) + f(\omega) + f(\omega^2) + f(\omega^3)$.
   (a) Le calcul direct avec $\omega = e^{i\pi/2}$ donne :

$$
\begin{aligned}
F &= (1+1)^{4p} + (1+\omega)^{4p} + (1+\omega^2)^{4p} + (1+\omega^3)^{4p} \\
&= 2^{4p} + (1+i)^{4p} + (1-i)^{4p} \\
&= 2^{4p} + (2i)^{2p} + (-2i)^{2p} \\
&= 2^{4p} + (-1)^p 2^{2p+1} \\
&= 2^{2p+1}(2^{2p-1} + (-1)^p).
\end{aligned}
$$

   (b) Alors

$$
\begin{aligned}
F &= 2^{4p} + (\omega+1)^{4p} + (\omega^2+1)^{4p} + (\omega^3+1)^{4p} \\
&= \sum_{k=0}^{4p}\binom{4p}{k} + \sum_{k=0}^{4p}\binom{4p}{k}\omega^k + \sum_{k=0}^{4p}\binom{4p}{k}\omega^{2k} + \sum_{k=0}^{4p}\binom{4p}{k}\omega^{3k} && \text{Newton} \\
&= \sum_{k=0}^{4p}\binom{4p}{k}(1+\omega^k+\omega^{2k}+\omega^{3k}) \\
&= \sum_{k=0}^{4p}\left(\binom{4p}{k}\sum_{j=0}^{3}\omega^{jk}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{4p}\binom{4p}{k} I_{4,k} \\
&= \sum_{\substack{0\le k\le 4p \\ k\equiv 0\ [4]}}\binom{4p}{k} I_{4,k} + \sum_{\substack{0\le k\le 4p \\ k\equiv 1\ [4]}}\binom{4p}{k} I_{4,k} + \sum_{\substack{0\le k\le 4p \\ k\equiv 2\ [4]}}\binom{4p}{k} I_{4,k} + \sum_{\substack{0\le k\le 4p \\ k\equiv 3\ [4]}}\binom{4p}{k} I_{4,k} \\
&= \sum_{0\le 4j\le 4p}\binom{4p}{4j} I_{4,4j} && \text{cf 2.}
\end{aligned}
$$

$$= 4\sum_{j=0}^{p}\binom{4p}{4j} \qquad \text{cf 2.}$$

(c) D'où l'on déduit :

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{4p}{4j} = \frac{1}{4}\left(2^{4p}+(-1)^p 2^{2p+1}\right) = 2^{4p-2}+(-1)^4 2^{2p-1} = 2^{2p-1}\left(2^{2p-1}+(-1)^p\right).$$

5. On retourne au cas général avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $j \in \mathbb{N}$. Alors $\exists b \in \{0,\dots,n-1\}$ et $\exists a \in \mathbb{N}$ tel que $j = an+b$ (division euclidienne). Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(j+k)^2} &= \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(b+na+k)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{b^2+k^2+2bk+n(na^2+2ab+2ak)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{b^2+k^2+2bk} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(b+k)^2} \\
&= \sum_{q=b}^{n+b-1}\omega^{q^2} && \text{chgt ind } q=b+k \\
&= \sum_{q=b}^{n-1}\omega^{q^2} + \sum_{q=n}^{n+b-1}\omega^{q^2} && \text{car } b \leq n-1 \\
&= \sum_{q=b}^{n-1}\omega^{q^2} + \sum_{e=0}^{b-1}\omega^{(e+n)^2} && \text{chgt ind } e=q-n \\
&= \sum_{e=b}^{n-1}\omega^{e^2} + \sum_{e=0}^{b-1}\omega^{e^2+n(n+2e)} \\
&= \sum_{e=b}^{n-1}\omega^{e^2} + \sum_{e=0}^{b-1}\omega^{e^2} \\
&= \sum_{e=0}^{n-1}\omega^{e^2} \\
&= G_n
\end{aligned}$$

6. On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}I_{n,2k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{k^2}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{2jk}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{k^2+2jk} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{(k+j)^2-j^2} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\omega^{-j^2}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(k+j)^2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\overline{\omega^{j^2}}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(k+j)^2}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\overline{\omega^{j^2}}G_n && \text{cf question précédente} \\
&= G_n\overline{\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j^2}} && \text{linéarité de la somme et de la conjugaison} \\
&= G_n\overline{G_n}
\end{aligned}
$$

7. Supposons que n est pair, *i.e.* si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$|G_n|^2 = \sum_{k=0}^{2p-1}\omega^{k^2}I_{2p,2k}$$

Or $I_{2p,2k} \neq 0 \iff 2k \equiv 0\ [2p] \iff k \equiv 0\ [p]$. Et comme $k \in \{0,\dots,2p-1\}$, on a donc $k \in \{0,p\}$. D'où

$$
\begin{aligned}
|G_n|^2 &= \omega^0 I_{2p,0} + \omega^{p^2}I_{2p,2p} \\
&= 2p + 2p\left(e^{i\pi/p}\right)^{p^2} \\
&= 2p(1+e^{ip\pi}) \\
&= 2p(1+(-1)^p)
\end{aligned}
$$

Supposons maintenant que n soit impair, *i.e.* $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors

$$
\begin{aligned}
|G_n|^2 &= \sum_{k=0}^{2p}\omega^{k^2}I_{2p+1,2k} \\
&= I_{2p+1,0} = 2p+1
\end{aligned}
$$

car $2k \equiv 0\ [2p+1] \iff \exists q \in \mathbb{Z},\ 2k = (2p+1)q$. Donc q est pair puisque $2p+1$ n'est pas divisible par 2 et 2 est un nombre premier. Donc $\exists q' \in \mathbb{Z},\ k = (2p+1)q'$. Donc k est un multiple de $2p+1$ dans $\{0,\dots,2p\}$. Le seul multiple de $2p+1$ dans cet ensemble est 0. Donc $k = 0$.

Moralité :

$$|G_n|^2 = \begin{cases} 2p(1+(-1)^p) & \text{si } n = 2p \\ 2p+1 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On calcul :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^{np} &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{np}\binom{np}{\ell}\omega^{k\ell} && \text{Binôme de Newton} \\
&= \sum_{\ell=0}^{np}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{np}{\ell}\omega^{k\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{np}\left(\binom{np}{\ell}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k\ell}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{np}\binom{np}{\ell}I_{n,\ell} \\
&= \sum_{\substack{0\le\ell\le np \\ \ell\equiv 0\ [n]}}\binom{np}{\ell}I_{n,\ell} && \text{question 2}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{0 \leq kn \leq np} \binom{np}{kn} n$$
$$= n \sum_{k=0}^{p} \binom{np}{kn}$$

9. On reprend le cas $n = 4$. On a :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{p} \binom{4p}{4k} &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} (1+\omega^k)^{4p} \\ &= \frac{1}{4} \big(f(1) + f(\omega) + f(\omega^2) + f(\omega^3)\big) \\ &= \frac{1}{4} \left(2^{4p} + 2^{1+2p} \cos(p\pi)\right) \\ &= 2^{2p+1} \left(2^{2p-1} + (-1)^p\right) \end{aligned}$$

On a donc retrouvé la question 4c.