NOM :
Prénom :

Mardi 16 Septembre 2025

Lycée Loges

Interrogation 1

Calcul Algébrique

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition des factorielles.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le factoriel de n, noté $n!$, par

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \prod_{k=1}^{n} k & k \geq 1 \end{cases}$$

2. Identité de Bernoulli (3ème identité remarquable).

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k.$$

3. Définition des coefficients binomiaux.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. On définit le coefficient binomiale, noté $\binom{n}{k}$, par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{k!}.$$

4. Binôme de Newton.

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

6. Propriétés algébriques des coefficients binomiaux.

On a les propriétés algébriques suivantes :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, n\}, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, n\}, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \dots, n\}, k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

7. Somme géométrique.

Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

8. Formule de Pascal.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Exercice 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} 2^k$.

Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} 2^k &= \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \binom{k}{i} 2^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 2^k && \text{interversion sommes} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(2^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \right) && \text{linéarité} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (2^k 2^k) && \text{Newton}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 4^k$$

$$= \frac{1-4^{n+1}}{1-4} \qquad \text{somme géo de raison } 4 \neq 1$$

$$= \frac{1}{3}(4^{n+1}-1).$$