NOM :
Prénom :

Mardi 23 Septembre 2025

Interrogation 2

Complexes

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Relation coefficients / racines.
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Alors $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sont solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si, et seulement si, $\begin{cases} z_1 + z_2 = -b/a \\ z_1 z_2 = c/a \end{cases}$.

2. Inégalités triangulaires (énoncé complet).
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$. Et $|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$.

3. Définition du module d'un complexe.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le module de z, noté $|z|$, par $|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}$.

4. Définition du conjugué d'un complexe.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le conjugué de z, noté $\overline{z}$, par $\overline{z} = \mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z)$.

5. Formules d'Euler.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

6. Définition de l'exponentielle complexe.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe e^z par $e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)} e^{i\,\mathfrak{Im}(z)}$.

7. Caractérisation des réels et imaginaires purs par le conjugué.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z + \overline{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$. D'où $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

8. Expression des racines n-ème de l'unité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des racines n-ème de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$ et

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 2 :
Résoudre l'équation $z^2 + (2 + 3i)z - 2 + 4i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 + (2 + 3i)z - 2 + 4i = 0$. $\Delta = (2 + 3i)^2 - 4(-2 + 4i) = -5 + 12i + 8 - 16i = 3 - 4i$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$ (*i.e.* δ est une racine carrée de Δ). Alors $a^2 + b^2 = |\delta^2| = |\Delta| = \sqrt{3 + 16} = 5$, par la caractérisation des complexes par la forme trigonométrique ; et $a^2 - b^2 = \mathfrak{Re}(\delta^2) = \mathfrak{Re}(\Delta) = 3$ par la caractérisation des complexes par la forme algébrique.

On a donc :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{5+3}{2} = 3 \\ b^2 = \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

Or, toujours par la caractérisation des complexes par la forme algébrique, $2ab = \mathfrak{Im}(\delta^2) = \mathfrak{Im}(\Delta) = -4 < 0$. Donc a et b sont de signes contraires. ON choisit alors $\delta = \sqrt{3} - i$.

D'où, l'on déduit

$$\begin{cases} z = \frac{-2-3i-\sqrt{3}+i}{2} \\ \text{ou} \\ z = \frac{-2-3i+\sqrt{3}-i}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} z = -\frac{2+\sqrt{3}}{2} - i \\ \text{ou} \\ z = \frac{\sqrt{3}-2}{2} - 2i \end{cases}$$