NOM :
Prénom :

Mardi 30 Septembre 2025

Lycée Loges

Interrogation 3

Ensembles, Application, Relations d'Équivalence

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de l'inclusion.

Soit E, F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, noté $E \subset F$ si, $\forall x \in E,\ x \in F$.

2. Caractérisation de l'injectivité.

Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$. f est injective ssi $(\forall x, y \in E,\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$ ssi $(\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y)$

3. Définition de l'image directe et réciproque d'un ensemble.

Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$, $A \subset E$, $X \subset F$. On définit l'image directe de A par f, noté $f(A)$, par $f(A) = \{f(a),\ a \in A\} = \{y \in F,\ \exists a \in A,\ y = f(a)\}$.

4. Définition d'une relation d'équivalence.

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$ ($\mathcal{R}$ est réflexive), $\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x)$ ($\mathcal{R}$ est symétrique) et $\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}z)$ ($\mathcal{R}$ est transitive).

5. Composée d'injections, surjections et bijections.

Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective. Donc si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijectives. Et dans ce dernier cas, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

6. Caractérisation de la bijectivité.

Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$. f est bijective ssi $\forall y \in F,\ \exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$ ssi $\exists g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Et dans ce cas, $g = f^{-1}$.

7. Complémentaire et opérations ensemblistes.

Soit E un ensemble, $A, B \subset E$. Alors $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; $A \setminus A = \emptyset$; $A \setminus \emptyset = A$; $A \subset B \implies B = (B \setminus A) \cup A$; $A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}$; $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$.

8. Injectivité et surjectivité d'une composée.

Soit E, F, G trois ensembles. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Et si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 2 :
Soit E, F, G trois ensembles. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$. Soit $h : E \to F \times G$ définie par $\forall x \in E,\ h(x) = (f(x), g(x))$. Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective. Montrer que si h est surjective, alors f et g sont surjectives.

Supposons f ou g injective. Soit $x, y \in E$ tels que $h(x) = h(y)$. Donc $(f(x), g(x)) = (f(y), g(y))$ par définition de h. Et donc $f(x) = f(y)$ et $g(x) = g(y)$ par définition de l'égalité dans un produit cartésien. Or f et ou g est injective. Donc $x = y$.

On vient donc de montrer que $\forall x, y \in E,\ (h(x) = h(y) \implies x = y)$. Et donc, par caractérisation de l'injectivité, h est injective.

Supposons h surjective. Soit $(x, y) \in F \times G$. Alors, par surjectivité de h, $\exists a \in E$ tel que $h(a) = (x, y)$. Donc, par définition de h, $(f(a), g(a)) = (x, y)$. Donc, par définition de l'égalité dans un produit cartésien, $f(a) = x$ et $g(a) = y$.

On vient donc de montrer que $\forall (x, y) \in F \times G,\ \exists a \in E$ tel que $f(a) = x$ et $g(a) = y$. Et donc, en particulier, f et g sont surjectives.