DS 2
Complexes - Théories des ensembles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 01 Octobre 2025

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Autour des polynômes cyclotomiques) :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynômes cyclotomiques, notés Φ_n, par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Partie 1 : Généralités

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(1-z)\Phi_n(z) = 1 - z^n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$.
   (a) En remarquant que $\forall z \in \mathbb{C},\ -z = 1-(z+1)$ et $2-z = 1-(z-1)$, montrer que

   $$\forall z \in \mathbb{C},\ -z\Phi_n(z+1) = 1-(z+1)^n \qquad \text{et} \qquad (2-z)\Phi_n(z-1) = 1-(z-1)^n.$$

   (b) Résoudre alors l'équation $(2-z)\Phi_n(z-1) + z\Phi_n(z+1) = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.
3. Soit $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
   (a) Calculer $\Phi_n(\omega)$.
   (b) Montrer que $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\omega^k$ est un réel. (Un petit bonus sera accordée si deux méthodes différentes sont présentées).
   (c) On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k$. Développer et simplifier $(1-\omega)T_n$ et en déduire une expression simple de T_n.

Partie 2 : Un lien avec des sinus

Le but de cette partie est de calculer

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\Phi_n(e^{i\theta})$.
   (b) En déduire que
   $$S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$
   (c) En déduire la valeur de $\tan(\pi/8)$.
   (d) Déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$ (on rappelle que $\frac{\tan(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$).
5. On fixe $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On pose
   $$B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{-ik\pi/n} \qquad \text{et} \qquad C_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$
   (a) Montrer que $A_n = B_n C_n$.
   (b) Montrer que $B_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
   (c) Résoudre l'équation $\Phi_n(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ et donner une factorisation de Φ_n. On rappelle que si $P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ est un polynôme ayant $x_1, \ldots, x_p$ comme racine, alors $P(X) = \prod_{k=1}^{p}(X - x_k)$.
   (d) À l'aide de $\Phi_n(1)$, calculer C_n.
   (e) Donner enfin la valeur de A_n.

Partie 3 : À propos d'une équation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$. Le but de cette partie est d'étudier le lieu des complexes $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$nz^n = \Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $nz^n = \Phi_n(z)$.

6. Peut-on avoir $z = 1$? On supposera désormais que $z \neq 1$.
7. Supposons $|z| > 1$. Justifier que $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $|z|^k < |z|^n$ puis montrer que l'on aboutit à une contradiction.
8. Supposons maintenant $|z| = 1$.
   (a) Justifier qu'il existe un unique $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$.
   (b) Montrer que
   $$ne^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$
   (c) Justifier que $e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}$ est un réel et aboutir alors à une contradiction.
9. Conclure.

Problème 2 (Équations ensemblistes) :
On fixe, pour tout ce problème, un ensemble E non vide et deux parties A et B de l'ensemble E. Rappelons qu'on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, et $\emptyset$ l'ensemble vide. Si X est une partie de E, on note $f(X) = (X \cap A) \cup B$. On définit ainsi une application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$.

1. (a) On suppose dans cette question que $A = \emptyset$. Calculer $f(X)$ pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$.
   (b) Même question si $B = E$. Que remarque-t-on de particulier dans ces deux cas ?
   (c) Calculer dans le cas général $f(\emptyset)$, $f(A)$ et $f(B)$.
2. (a) Montrer que la fonction f est croissante au sens de l'inclusion, *i.e.* montrer que $\forall X, X' \subset E$, $X \subset X' \implies f(X) \subset f(X')$.
   (b) Soit $Y \subset E$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
      (i) Y admet un antécédent par f dans $\mathcal{P}(E)$.
      (ii) $B \subset Y \subset (A \cup B)$
      (iii) $f(Y) = Y$
3. (a) Montrer que f est constante si, et seulement si, $A \subset B$.
   (b) Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A = E$ et $B = \emptyset$.
4. (a) Calculer $f \circ f$.
   (b) Soit F un ensemble non vide quelconque et $g : F \to F$ idempotente, *i.e.* telle que $g \circ g = g$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
      (i) g est injective
      (ii) g est surjective
      (iii) $g = \mathrm{Id}_F$
   (c) Montrer alors que f est bijective si, et seulement si, $A = E$ et $B = \emptyset$.
5. Soit $A \subset E$. On va maintenant résoudre l'équation $f(X) = A$ d'inconnue $X \subset E$ (il peut être utile de s'aider d'un dessin-patate).
   (a) Montrer que l'équation $f(X) = A$ a des solutions si, et seulement si, $B \subset A$.
      On suppose désormais que $B \subset A$.
   (b) Montrer que pour tout $(X', X'') \in \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(\overline{A})$, l'ensemble $X = (A \setminus B) \cup X' \cup X''$ est solution de l'équation $f(X) = A$.
   (c) Soit maintenant $X \subset E$ telle que $f(X) = A$.
      i. Montrer que $(A \setminus B) \subset (A \cap X)$.
      ii. Montrer que $(A \cap X) = (A \setminus B) \cup (A \cap X \cap B)$.
      iii. En déduire qu'il existe $(X', X'') \in \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(\overline{A})$ tel que $X = (A \setminus B) \cup X' \cup X''$.
   (d) Conclure sur la résolution de l'équation $f(X) = A$.

Exercice 3 (BONUX) :
À ne traiter que si 75% *du sujet a été correctement traité.*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Déterminer une CNS sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que φ soit surjective.