DS 2
Complexes - Théorie des ensembles
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 01 Octobre 2025

Problème 1 (Autour des polynômes cylcotomiques) :
On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Partie 1 : Généralités

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Alors
$$\begin{aligned}(1-z)\Phi_n(z) &= \sum_{k=0}^{n-1}(z^k - z^{k+1}) && \text{linéarité}\\ &= 1 - z^n. && \text{télescopage}\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Grâce à la question précédente, on a
$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C},\ -z\Phi_n(z+1) &= (1-(1+z))\Phi_n(1+z)\\ &= 1-(1+z)^n && \text{cf 1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C},\ (2-z)\Phi_n(z-1) &= (1-(z-1))\Phi(z-1)\\ &= 1-(z-1)^n. && \text{cf 1}\end{aligned}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $(2-z)\Phi_n(z-1) + z\Phi_n(z+1) = 0$. Alors
$$\begin{aligned}(2-z)\Phi_n(z-1) + z\Phi_n(z+1) = 0 &\iff 1-(z-1)^n - 1 + (z+1)^n = 0 && \text{cf } 2a\\ &\iff (z+1)^n = (z-1)^n\\ &\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\ z+1 = (z-1)e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\ \left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) z = -\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\end{aligned}$$

Mais si $k=0$ dans la relation précédente, alors on aurait $0=-2$ ce qui bien sûr mène à ☠. Donc $k \neq 0$. D'où
$$\begin{aligned}(2-z)\Phi_n(z-1) + z\Phi_n(z+1) = 0 &\iff \exists k \in \{1,\dots,n-1\},\ \left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) z = -\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\\ &\iff \exists k \in \{1,\dots,n-1\},\ z = -\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \exists k \in \{1,\dots,n-1\},\ z = -\frac{e^{ik\pi/n}\left(e^{-ik\pi/n}+e^{ik\pi/n}\right)}{e^{ik\pi/n}\left(e^{-ik\pi/n}-e^{ik\pi/n}\right)}\\
&\iff \exists k \in \{1,\dots,n-1\},\ z = -\frac{2\cos(k\pi/n)}{-2i\sin(k\pi/n)} \text{Euler}\\
&\iff \exists k \in \{1,\dots,n-1\},\ z = \frac{1}{i\tan(k\pi/n)}.
\end{aligned}$$

D'autre part, cette équation est une équation polynomiale de degré $n-1$ et a donc exactement $n-1$ racines, comptées avec multiplicité. On a donc toutes les solutions de l'équation.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$.

(a) D'après la question 1, $(1-\omega)\Phi_n(\omega) = 1-\omega^n = 1-e^{2i\pi} = 0$. Or $\omega \neq 1$ car $n \geq 2$. Donc $1-\omega \neq 0$ et donc $\Phi_n(\omega) = 0$.

(b) On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k$. Alors

$$\begin{aligned}
P_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k\\
&= (1+\omega)^n - \omega^n && \text{Newton}\\
&= e^{in\pi}n2^n\cos(\pi/n)^n - 1\\
&= -(2^n\cos(\pi/n)^n + 1) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On peut le faire aussi d'une autre façon :

$$\begin{aligned}
\overline{P_n} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\overline{\omega}^k && \text{par } \mathbb{R}\text{-linéarité de la conjugaison}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^{-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{n-k}\omega^{n-k} && \text{symétrie coeff binomiaux et } \omega^n = 1\\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\omega^j && \text{chgt indice} j = n-k\\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\omega^j\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k\\
&= P_n.
\end{aligned}$$

D'où $P_n \in \mathbb{R}$ par caractérisation des réels par la conjugaison.

(c) On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k$. Alors

$$\begin{aligned}
(1-\omega)T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k - \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^{k+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\omega^k - \sum_{j=1}^{n}(j-1)\omega^j && \text{chgt indice } j = k+1\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \omega^k - (n-1)\omega^n\\
&= \Phi_n(\omega) - 1 - n + 1
\end{aligned}$$

$$= -n \qquad \text{cf } 3a$$

Comme $\omega = e^{2i\pi/n} \neq 1$ car $n \geq 2$, on en déduit

$$T_n = \frac{n}{\omega - 1} = \frac{n}{e^{i\pi/n}(e^{i\pi/n} - e^{-i\pi/n})} = \frac{ne^{-i\pi/n}}{2i\sin(\pi/n)} = \frac{n}{\tan(\pi/n)}e^{-i\pi/n}.$$

Partie 2 : Un lien avec des sinus

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$,

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin(k\pi/n) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$.

(a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$. Alors

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}.$$

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors $e^{i\theta} = 1$ et donc $\Phi_n(e^{i\theta}) = \Phi_n(1) = n$. Supposons maintenant $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Alors $e^{i\theta} \neq 1$. Et donc

$$\begin{aligned}
\Phi_n(e^{i\theta}) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \\
&= \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} && \text{somme géométrique de raison } e^{i\theta} \neq 1 \\
&= \frac{e^{in\theta/2}(e^{-in\theta/2} - e^{in\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} && \text{arc moitié} \\
&= e^{i(n-1)\theta/2}\frac{-2i\sin(n\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)} && \text{Euler} \\
&= e^{i(n-1)\theta/2}\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = \begin{cases} n & \text{si } \theta \equiv 0[2\pi] \\ e^{i(n-1)\theta/2}\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} & \text{si } \theta \not\equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

(b) En reprend la question précédente et on l'applique avec $\theta = \pi/n$. Alors $e^{ik\pi/n} \neq 1$ et donc

$$\Phi_n(e^{i\pi/n}) = e^{\frac{i(n-1)\pi}{2n}} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = e^{\frac{i(n-1)\pi}{2n}} \frac{\sin(\pi/2)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{e^{\frac{i(n-1)\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n) \\
&= \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n}\right) && \text{car } \sin(0) = 0 \text{ et } \mathbb{R}\text{-linéarité de } \mathfrak{Im} \\
&= \mathfrak{Im}(\Phi_n(e^{i\pi/n})) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sin\left(\pi/2 - \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.
\end{aligned}
$$

On aurait pu aussi prouver cette relation par récurrence, mais ce n'est pas la méthode indiquée par l'énoncé.

(c) En particulier, avec $n = 4$, on a

$$
\begin{aligned}
\tan(\pi/8) &= \frac{1}{S_4} \\
&= \frac{1}{\sin(1/2) + \sin(\pi/2) + \sin(3\pi/4)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}/2 + 1 + \sqrt{2}2} \\
&= \frac{1}{1+\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}
$$

(d) On a enfin

$$
\begin{aligned}
\frac{S_n}{n} &= \frac{1}{n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{2/\pi}{\frac{2n}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{2/\pi}{\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

car $\frac{\pi}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

5. On fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$ (encore). On pose

$$
B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{-ik\pi/n} \qquad \text{et} \qquad C_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).
$$

(a) On a

$$
\begin{aligned}
A_n &= \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi}n}{2i} && \text{Euler} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-ik\pi/n}}{2i} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{-ik\pi/n} \left(1 - e^{2ik\pi/n}\right) \\
&= B_n C_n.
\end{aligned}
$$

(b) On aussi

$$
B_n = \left(\frac{-1}{2i}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} e^{-ik\pi/n}
$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-1}{2i}\right)^{n-1} e^{-\frac{i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k} \\
&= \left(\frac{-1}{2i}\right)^{n-1} e^{-\frac{i\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}} && \text{Gauss} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(2i)^{n-1}} \left(e^{-i\pi/2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(2i)^{n-1}} (-i)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

(c) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Phi_n(z) = 0$. D'abord, remarquons que $z \neq 1$ car $\Phi_n(1) = n \neq 0$. En utilisant la question 1, on a alors

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z) = 0 &\iff \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0 && \text{car } z \neq 1 \\
&\iff z^n = 1 \\
&\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Or $z \neq 1$, donc $\Phi_n(z) = 0 \iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\},\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

D'autre, l'équation $\Phi_n(z) = 0$ est une équation polynomiale de degré $n-1$ et a donc $n-1$ racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité. On a donc trouver toutes les racines de Φ_n.

On en déduit donc que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \Phi_n(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

(d) On a $\Phi_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$. D'où, avec la question précédente,

$$n = \Phi_n(1) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = C_n.$$

(e) On déduit des question 5a, 5b et 5d :

$$A_n = B_n C_n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Partie 3 : À propos d'une équation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $nz^n = \Phi_n(z)$.

6. On sait déjà que $\Phi_n(1) = n$. Donc $z = 1$ est une solution de l'équation $nz^n = \Phi_n(z)$. On suppose désormais $z \neq 1$.

7. On suppose $|z| > 1$. Alors $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $|z|^{n-k} > |z| > 1$. Et donc $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $|z|^k < |z|^n$. Alors

$$\begin{aligned}
n|z|^n &= |\Phi_n(z)| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k && \text{inégalité triangulaire} \\
&< \sum_{k=0}^{n-1} |z|^n \\
&= n|z|^n && ☠
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $|z| \leq 1$.

8. Supposons $|z| = 1$.

(a) On a donc $z \in \mathbb{U}$. Donc $\exists! \theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais comme $z \neq 1$, en utilisant 6 , on a $\theta \neq 0$ et donc $\exists! \theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$.

(b) Comme $nz^n = \Phi_n(z)$, on a

$$\begin{aligned} ne^{in\theta} &= \Phi_n(e^{i\theta}) \\ &= \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i(n-1)\theta/2} && \text{cf } 4a \end{aligned}$$

D'où

$$ne^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} = ne^{in\theta} e^{-i(n-1)\theta/2} = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

(c) D'après la question précédente, on a $e^{i(n+1)\theta/2} = \frac{\sin(n\theta/2)}{n\sin(\theta/2)} \in \mathbb{R}$. D'où, par caractérisation des réels par les arguments, on a

$$\frac{(n+1)\theta}{2} \equiv 0[\pi] \iff \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n+1}\right].$$

Donc $\exists p \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{2p\pi}{n+1}$. Mais comme $\theta \in]0, 2\pi[$, on en déduit $\exists p \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\theta = \frac{2p\pi}{n+1}$.

On a donc $e^{i(n+1)\theta/2} = e^{ip\pi} = (-1)^p$. Donc, avec la question précédente :

$$\begin{aligned} n(-1)^p &= \frac{\sin\left(\frac{2np\pi}{2(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{2p\pi}{2(n+1)}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{pn\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{p(n+1)\pi - p\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)} \\ &= \frac{(-1)^{p+1}\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)} \\ &= (-1)^{p+1}. \end{aligned}$$

On en déduit donc $n = -1$ et donc ☠.

9. Finalement, si $z \in \mathbb{C}$ tel que $nz^n = \Phi_n(z)$. Si $|z| > 1$, on a ☠ d'après la question 1. Donc $|z| \leq 1$. Si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, on aboutit aussi à ☠ d'après la question précédente. Donc finalement, on a $z = 1$ ou $|z| < 1$.

Autrement dit on a

$$nz^n = \Phi_n(z) \implies \begin{cases} z = 1 \\ \text{ou} \\ |z| < 1 \end{cases}$$

Problème 2 (Équations ensemblistes) :

1. (a) Dans cette question, $A = \emptyset$. Alors, pour $X \subset E$,

$$f(X) = (X \cap \emptyset) \cup B = \emptyset \cup B = B$$

Donc f est la fonction constante égale à B.

(b) On suppose maintenant $B = E$. Soit $X \subset E$. Alors

$$f(X) = (X \cap A) \cup E = E$$

car $X \cap A \subset E$.

Dans les deux cas, on voit que la fonction f est constante (et égale à B dans le premier cas et E dans le second).

(c) On calcule

$$f(\emptyset) = (A \cap \emptyset) \cup B = \emptyset \cup B = B$$

et

$$f(A) = (A \cap A) \cup B = A \cup B$$

et aussi

$$f(B) = (A \cap B) \cup B = B$$

car $A \cap B \subset B$.

2. (a) Soit $X, X' \subset E$ tels que $X \subset X'$. Il faut donc comparer $f(X) = (A \cap X) \cup B$ et $f(X') = (A \cap X') \cup B$. Il faut donc commencer par comparer $A \cap X$ et $A \cap X'$. Comme $X \subset X'$, on a $A \cap X \subset A \cap X'$. Donc $(A \cap X) \cup B \subset (A \cap X') \cup B$. En effet, si $x \in (A \cap X) \cup B$, soit $x \in B$ et donc $x \in (A \cap X') \cup B$, ou soit $x \in (A \cap X) \subset (A \cap X')$ et donc $x \in (A \cap X') \cup B$. Quoi qu'il en soit, $f(X) \subset f(X')$. Et donc f est croissante.

(b) Soit $Y \subset E$. On va montrer que $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i)$. Ce qui démontrera les équivalences voulues.

$\boxed{(i) \implies (ii)}$ On suppose donc que Y a un antécédent par f. Donc $\exists X \subset E$ tel que $f(X) = (A \cap X) \cup B = Y$. On a alors $B \subset B \cup (A \cap X) = Y$ ce qui montre la première inclusion. Et aussi $A \cap X \subset A \subset A \cup B$. Donc $f(X) \subset B \cup (A \cup B) = A \cup B$. D'où $Y \subset A \cup B$.

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ On suppose $B \subset Y \subset (A \cup B)$. On a d'abord facilement $f(Y) \subset Y$. En effet, si $y \in f(Y)$, alors soit $y \in B \subset Y$, donc $y \in Y$, soit $y \in A \cap Y \subset Y$, donc $y \in Y$ également. Il faute donc montrer l'inclusion inverse, c'est à dire montrer que $Y \subset f(Y) = (A \cap Y) \cup B$. Mais comme $B \subset Y$, on peut écrire que $Y = B \cup (Y \setminus B)$. Si $y \in Y$, alors soit $y \in B$, soit $y \in Y \setminus B$.

Si $y \in B$, alors forcément $y \in (A \cap Y) \cup B = f(Y)$.

Si $y \in Y \setminus B$, alors $y \in Y$ en particulier, donc $y \in (A \cup B)$. Donc $y \in A$ ou $y \in B$. Mais y ne peut pas être dans B puisque $y \in Y \setminus B$ et $B \subset Y$. Donc $y \in A$. Mais y est toujours dans $Y \setminus B \subset Y$. Donc $y \in (A \cap Y)$ et donc $y \in f(Y)$. D'où $Y \subset f(Y)$ ce qui montre l'égalité.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$ On suppose donc que $f(Y) = Y$. Donc Y est l'image d'un élément de $\mathcal{P}(E)$ par f. Donc Y a un antécédent (qui se trouve être lui même). D'où le (i).

3. (a) D'après les calculs effectués un peu plus haut, on a $f(A) = A \cup B$ et $f(B) = B$. Donc pour que f soit constante, il nous faut $A \cup B = B$, c'est à dire $A \subset B$ d'après la question 1. On a donc une condition nécessaire. On va maintenant montrer que cette condition est suffisante.

Supposons donc que $A \subset B$ et montrons que f est constante. Soit $X \subset E$. Alors $f(X) = (A \cap X) \cup B$. Mais $A \cap X \subset A \subset B$. Donc $(A \cap X) \cup B = B$ et donc $\forall X \subset E,\ f(X) = B$.

(b) On a $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$. Pour que f soit surjective, il faut en particulier que $E \in f(\mathcal{P}(E))$, i.e. E doit avoir un antécédent par f, c'est-à-dire qu'il doit y avoir un $X \subset E$ tel que $f(X) = (A \cap X) \cup B = E$. Mais on a dit que f est croissante, donc on doit avoir $f(E) = (A \cap E) \cup B = A \cup B = E$. Mais $\emptyset$ doit aussi avoir un antécédent. Par croissance de la fonction, on doit donc avoir $f(\emptyset) = B = \emptyset$. La condition nécessaire pour que f soit surjective est donc $A = E$ et $B = \emptyset$. On va donc montrer qu'elle est suffisante.

Supposons donc que $A = E$ et $B = \emptyset$. Soit $X \subset E$. Alors $f(X) = (A \cap X) \cup B = (E \cap X) \cup \emptyset = X$. Donc X a un antécédent par f et donc f est surjective.

4. (a) Pour voir ce que fait $f \circ f$, il faut calculer ce que fait cette fonction sur un ensemble $X \subset E$. Soit donc $X \subset E$. Alors

$$\begin{aligned} f \circ f(X) &= f(f(X)) \\ &= (A \cap f(X)) \cup B \\ &= (A \cap ((A \cap X) \cup B)) \cup B \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A \cap (A \cap X) \cup (A \cap B)) \cup B \\
&= (A \cap X) \cup B \\
&= f(X)
\end{aligned}
$$

car $A \cap B \subset B$. Donc $f \circ f = f$.

Une telle fonction s'appelle une fonction idempotente.

(b) Soit $g : F \to F$ une fonction idempotente.

$\boxed{(i) \implies (iii)}$ Supposons que g soit injective et montrons que $g = \mathrm{Id}_F$. Soit $y \in F$. On a donc $g \circ g(y) = g(g(y)) = g(y)$ et l'injectivité de g nous donne alors $g(y) = y$. Donc $g = \mathrm{Id}_F$.

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ Supposons que g est surjective. Soit $x \in F$. La surjectivité de g nous donne l'existence d'un $x' \in F$ tel que $g(x') = x$. Alors $g(x) = g \circ g(x') = g(x') = x$. Donc là encore $g = \mathrm{Id}_F$.

Les autres implications sont faites d'offices. En effet, si $g = \mathrm{Id}_F$, c'est une bijection et donc une injection et une surjection ce qui nous donne (i) et (ii) d'un coup. D'où l'on a (i) équivalent à (iii) et (ii) équivalent à (iii) ce qui fournit du coup aussi l'équivalence aussi entre (i) et (ii) en passant pas (iii).

(c) Commençons par le sens indirecte. Supposons $A = E$ et $B = \emptyset$. Alors

$$\forall X \subset E,\ f(X) = (X \cap E) \cup \emptyset = X$$

donc $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ et donc f est bijective.

Réciproquement, supposons que f est bijective. Comme elle est idempotente, d'après la question précédente, cela revient à dire que $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$. En particulier, $\emptyset = f(\emptyset) = (\emptyset \cap A) \cup B = B$. On en déduit donc facilement $B = \emptyset$. Enfin $E = f(E) = E \cap A = A$ nous donne l'autre condition.

5. (a) Si $f(X) = A$ a des solutions, alors $A \in f(\mathcal{P}(E))$ donc A est dans l'image de f, donc A a un antécédent par f. Mais d'après la question précédente, on doit alors avoir $B \subset A \subset (A \cup B)$. Donc pour avoir des solutions, il est nécessaire d'avoir $B \subset A$.

Réciproquement, si on a $B \subset A$, on a bien sûr $B \subset A \subset A \cup B$ et donc, par la question précédente, $f(A) = A$. Donc l'équation $f(X) = A$ a des solutions (dont A est une solution).

(b) On suppose donc $B \subset A$ ce qui permet à l'équation $f(X) = A$ d'avoir des solutions dans $\mathcal{P}(E)$. On va commencer par le sens indirecte qui est le plus facile. Soit donc $X' \subset B$ et $X'' \subset \overline{A}$ et on pose $X = (A \setminus B) \cup X' \cup X''$. Alors

$$
\begin{aligned}
f(X) &= (A \cap X) \cup B \\
&= (A \cap ((A \setminus B) \cup X' \cup X'')) \cup B \\
&= (A \cap (A \setminus B) \cup (A \cap X') \cup (A \cup X'')) \cup B \\
&= (A \setminus B) \cup X' \cup \emptyset \cup B \\
&= A \cup X' = A
\end{aligned}
$$

Donc X est bien une solution.

(c) Soit $X \subset E$ tel que $f(X) = A$.

i. On a donc $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \Big((A \cap X) \cup B\Big) \cap \overline{B} \subset A \cap X$.

ii. On en déduit alors

$$
\begin{aligned}
A \cap X &= (A \setminus B) \cup \Big((A \cap X) \setminus (A \setminus B)\Big) \\
&= (A \setminus B) \cup \Big((A \cap X) \setminus (A \cap \overline{B})\Big) \\
&= (A \setminus B) \cup \Big((A \cap X) \cap (\overline{A \cap \overline{B}})\Big) \\
&= (A \setminus B) \cup \Big((A \cap X) \cap (\overline{A} \cup B)\Big) \\
&= (A \setminus B) \cup \Big((A \cap X \cap \overline{A}) \cup (A \cap X \cap B)\Big) \\
&= (A \setminus B) \cup (A \cap X \cap B)
\end{aligned}
$$

iii. Finalement, comme $E = A \cup \overline{A}$, on a $X = X \cap E = (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (A \cap X \cap B) \cup (X \cap \overline{A})$. Or $A \cap X \cap B \subset B$ et $X \cap \overline{A} \subset \overline{A}$. On pose $X' = X \cap A \cap B$ et $X'' = X \cap \overline{A}$. Alors $X = (A \setminus B) \cup X' \cup X''$.

(d) On a montré que si $X = (A \setminus B) \cup X' \cup X''$ avec $X' \subset B$ et $X'' \subset \overline{A}$, alors $f(X) = A$ (question 4b) et dans la question 4c, on montre que si $f(X) = A$, alors $\exists (X', X'') \in \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(\overline{A})$ tel que $X = (A \setminus B) \cup X' \cup X''$.

On a donc montré que

$$f(X) = A \iff \exists (X', X'') \in \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(\overline{A}),\ X = (A \setminus B) \cup X' \cup X''.$$

On a donc résolu l'équation $f(X) = A$.

Exercice 3 (BONUX) :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : n \to \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Supposons φ surjective.

Notons d'abord $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) - \varphi(n) = a_{n+1} \geq 0$. Donc φ est croissante. Et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq \varphi(0) \in \mathbb{N}$. Comme φ est surjective, on en déduit $0 \in \varphi(\mathbb{N})$ et donc $0 \geq \varphi(0) \geq 0$. Donc $a_0 = \varphi(0) = 0$.

De plus, si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \geq 2$. Alors $\varphi(k) = \varphi(k-1) + a_k \geq 2 + \varphi(k-1)$. Or, par croissance, $\forall \ell \leq k-1$, $\varphi(\ell) \leq \varphi(k-1) < \varphi(k-1) + 1$ et $\forall \ell \geq k$, $\varphi(\ell) \geq \varphi(k) > \varphi(k-1) + 1$. Donc $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\varphi(\ell) \neq \varphi(k-1) + 1 \in \mathbb{N}$. Donc $\varphi(k-1) + 1 \notin \varphi(\mathbb{N})$. ☠ car φ surjective.

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq 1$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Notons maintenant $I = \{n \in \mathbb{N},\ a_n = 1\}$. Donc $I \subset \mathbb{N}$. Et $I \neq \emptyset$ sinon φ serait l'application constante nulle et donc ne serait pas surjective. Supposons que I soit un ensemble fini. Soit $N = \max I$. Alors $\forall n > N$, $a_n = 0$. Et donc $\forall n > N$, $\varphi(n) = \varphi(N) = \mathrm{Card}(I)$. Et donc φ n'est pas surjective. ☠. Donc I est infini.

On en déduit donc que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $a_0 = 0$ et $\{n \in \mathbb{N},\ a_n = 1\}$ est infini.

Réciproquement, si $(a_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $a_0 = 0$ et $I = \{n \in \mathbb{N},\ a_n = 1\}$ est infini. Alors $\varphi(0) = 0$, φ est croissante facilement et si $n \in \mathbb{N}$, on note i_n le n-ème élément de I, alors $\varphi(i_n) = \sum_{k=0}^{i_n} a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n} = n$. Donc φ est surjective.