NOM :
Prénom :

Mardi 07 Octobre 2025

Interrogation 4

Fonctions Usuelles

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Propriétés analytiques de $\arccos$.
$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ est définie et continue sur $[-1,1]$, infiniment dérivable sur $]-1,1[$, strictement décroissante et $\forall x \in]-1,1[$, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Propriétés analytiques de $\arcsin$.
$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$ est définie et continue sur $[-1,1]$, infiniment dérivable sur $]-1,1[$, strictement croissante, impaire et $\forall x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Équation fonctionnelle de $\arctan$.
$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \mathrm{sign}(x)\pi/2$.
4. Définition de ch et sh.
On définit le cosinus hyperbolique, noté ch, et le sinus hyperbolique, noté sh, par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ et $\mathrm{sh}(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$.
5. Relations fonctionnelles de $\arcsin$.
$\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\forall x \in]1,1[$, $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. Relation entre $\arccos$ et $\arcsin$.
$\forall x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
7. Formule de trigonométrie hyperbolique.
$\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t)^2 - \mathrm{sh}(t)^2 = 1$.
8. Relations fonctionnelles de $\arctan$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 2 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(x) = \arcsin(2x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan(x) = \arcsin(2x)$.
$\arcsin$ est définie sur $[-1,1]$. Donc $2x \in [-1,1]$. Donc $x \in [-1/2, 1/2]$.
Et :

$$\begin{aligned}
& \arctan(x) = \arcsin(2x) \\
\Longrightarrow\ & \sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arctan(x)) \\
\Longleftrightarrow\ & 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\Longleftrightarrow\ & 4x^2(1+x^2) = x^2 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2(4x^2+3) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & x = 0 \text{ ou } x^2 = -3/4 \\
\Longleftrightarrow\ & x = 0
\end{aligned}$$

Par imparité de $\arctan$ et $\arcsin$, 0 est trivialement solution de l'équation. Donc :

$$\{x \in \mathbb{R},\ \arctan(x) = \arcsin(2x)\} = \{0\}.$$