



DM 2

Arg ! Des ch !

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 14 Octobre 2025

Partie I : Généralités autour des fonctions hyperboliques

1. Fonction argsh

- (a) Déterminer les limites de sh aux bornes de son domaine de définition.
- (b) Montrer que la fonction sh établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- (c) En résolvant l'équation $\operatorname{sh}(x) = y$, déterminer une expression simple de argsh .

2. Fonction argch

- (a) Déterminer les limites de ch en $+\infty$ et $-\infty$.
- (b) Montrer que ch est bijection sur $\mathbb{R}_+$ dans un ensemble que l'on déterminera. On appellera argch la bijection réciproque de $\operatorname{ch}|_{\mathbb{R}_+}$.
- (c) Soit $x \geq 0$ et $y \geq 1$ tels que $\operatorname{ch}(x) = y$. Montrer alors que $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ ou $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$.
- (d) En déduire une expression simple de argch .

Partie II : Étude d'une fonction particulière

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(x) - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right).$$

On se propose de donner une expression simple de f par trois méthodes différentes.

3. Première méthode : Étude de fonction

- (a) Déterminer le domaine de définition de f .
- (b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer f' .
- (c) En déduire une expression simple de f .

4. Deuxième méthode : Avec des fonctions hyperboliques

- (a) Montrer que $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $] -1, 1[$.
- (b) Montrer que th est bijective. On appellera argth sa réciproque et en donner une expression simple (à l'aide seulement du $\ln$).
- (c) Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer un réel z simple dépendant de y tel que $\frac{1+\operatorname{th}(y)}{1-\operatorname{th}(y)} = e^z$.
- (d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2 \arctan(e^x)) = -\operatorname{th}(x)$.
- (e) Retrouver l'expression simple de f de la question 3c.

5. Troisième méthode : Avec des fonctions circulaires.

- (a) Soit $x \in [-1, 1[$. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.
- (b) Exprimer f en fonction de θ et retrouver une expression simple de f .