

Chapitre 7

Suites Numériques

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

14 octobre 2025



Les suites jouent un rôle très important dans les mathématiques et plus spécifiquement en analyse. Elles permettent, entre autres choses, de discrétiser les problèmes continus. On verra dans un prochain chapitre que la très grande majorité des résultats d'analyse que l'on a, peuvent se traduire en terme de suite. Elles permettent également une première approche des notions d'infinis, de limites etc dans un cadre qui reste encore relativement accessible à l'intuition. Elles sont le premiers pas vers l'analyse.

On va développer dans tout ce chapitre la machinerie qui permet d'étudier les suites. On va commencer par étudier les suites d'un point de vue générale, et en fin de chapitre, on expliquera comment comparé les comportements asymptotiques des suites. Ce sera la partie véritablement nouvelle de ce chapitre.

Il y a plus de dangers dans une suite numérique allant jusqu'à l'infini que dans un arbre grandissant jusqu'au paradis. Les deux, à un moment donné, vont atteindre leur plus grande taille.

Gottlob Frege (1848-1925)
Créateur de la logique moderne.

Table des matières

1 Suites Réelles	3
1.1 Définitions générales	3
1.2 Opérations sur les suites réelles	6
1.3 Suites réelles et relation d'ordre	6
1.4 Limites d'une suite réelle	7
1.4.1 Limite finie	7
1.4.2 Limites infinies	12
1.4.3 Opérations sur les suites admettant des limites	13
1.4.4 Récapitulatifs	19
1.5 Étude de limite par comparaison	20
1.6 Suites arithmético-géométriques	24
1.7 Suites récurrentes	27
1.7.1 Suites récurrentes d'ordre 1 [✓]	27
1.7.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 [✓]	30
2 Extension aux suites complexes	33
2.1 Définition	33
2.2 Convergences	34
2.3 Cas des suites géométriques de raison complexe	36
2.4 Suites récurrentes complexes	37
3 Suites extraites	37
4 Comparaison de suites numériques	42
4.1 Négligeabilité	42
4.2 Dominance	47
4.3 Croissances comparées des suites de références	51
4.4 Équivalence	53
5 Cas des suites implicites	66

1 Suites Réelles

1.1 Définitions générales

Définition 1.1 (Suite réelle) :

On appelle suite réelle toute application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

On note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général u_n . On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Une suite pourra donc se noter $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou bien (u_n) , ou encore u (s'il est clair que c'est une suite, par exemple en définissant $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Elles sont à utiliser préférentiellement dans l'ordre du dessus. La première notation est la plus complète, et donc celle qu'il faut préférer. On indique qu'elle est la variable de la suite (dans le cas où il pourrait y avoir plusieurs paramètres) et le rang du premier terme. La seconde indique toujours la variable de la suite, mais n'indique plus le rang du premier terme. Et enfin, la dernière notation est la plus lacunaire. La variable de la suite n'est plus indiquée, ni le rang du premier terme. Cette dernière notation est donc à n'utiliser que si aucune ambiguïté n'est possible. Bref, à éviter.



Il ne faut pas confondre $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ qui est l'ensemble des valeurs prises par la suite et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Le premier est un ensemble de réels, c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (ou un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$), alors que le second est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ils n'ont pas le même type. On ne peut donc pas leur appliquer les mêmes opérations.

Remarque :

Dans ce cours, pour se fixer les idées, on ne considérera que des suites définies à partir du rang 0. Mais tous les résultats peuvent être adaptés pour des suites définies à partir du rang n_0 .

Remarque :

Une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être définie de 3 manières différentes :

- **De manière explicite** : on donne une formule en fonction de n pour calculer les termes u_n . C'est à dire que $u_n = f(n)$ pour une certaine fonction réelle f .

- **Par récurrence** : On donne la valeur des k premiers termes de la suite et on donne l'expression de u_n en fonction des k précédents. On dit alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre k . Autrement dit, on a une relation de la forme $u_{n+k} = f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1})$. Une suite récurrente d'ordre 1 est donc une suite u vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$.
- **De manière implicite** : u_n est défini comme la solution d'une équation dépendante de n . Par exemple, $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme la racine positive du polynôme $X^2 + 2nX - 5$.

Attention ! Une définition par récurrence ne permet pas toujours de définir correctement une suite : il n'existe pas de suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2 + \sqrt{1 - u_n}$.

Définition 1.2 (Suite constante, suite stationnaire) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- La suite u est dite constante si $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = c$.
- La suite u est dite stationnaire si $\exists C \in \mathbb{R}$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n = C$.

Une suite stationnaire est donc une suite constante à partir d'un certain rang. Et une suite constante est donc une suite stationnaire à partir du premier rang.

Remarque :

Dans la suite du cours, il est possible que j'utilise l'acronyme *APCR* qui veut dire *à partir d'un certain rang*. Je vais essayer de l'utiliser le moins possible. Il faudra donc le comprendre par " $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ tel que [blabla]".

Définition 1.3 (Suite majorée, minorée, bornée) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

- u est majorée si l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée, i.e. si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- u est minorée si l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est minorée, i.e. si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- u est bornée si l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est bornée, i.e. si $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.

On rappelle qu'un bon majorant ou minorant est un minorant pour la suite entière, donc qui ne dépend pas de n . Sinon, le majorant ou minorant dépend du rang auquel on se place. Ce n'est pas un majorant ou minorant de la suite.

Proposition 1.1 (Borne sup, inf d'une suite) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- (i) Si u est majorée, alors $\sup u$ existe et $\sup u = \sup(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup u(\mathbb{N})$
- (ii) Si u est minorée, alors $\inf u$ existe et $\inf u = \inf(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = \inf u(\mathbb{N})$

Démonstration :

Cela vient juste de la propriété de la borne sup (et inf) de $\mathbb{R}$ et des définitions de $u(\mathbb{N})$ □

Proposition 1.2 (Caractérisation des suites bornées [✓]) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a

$$u \text{ bornée} \iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Démonstration :

$\Rightarrow$ Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée. On sait donc $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$. D'où $|u_n| \leq \max(|m|, |M|)$.

$\Leftarrow$ Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, -M \leq u_n \leq M$ et donc la suite est bornée. □

Passer de la gauche à la droite fait perdre des informations. On prend le maximum des valeurs absolues des bornes. Écrire $m \leq u_n \leq M$ est plus précis que simplement $|u_n| \leq M$.

Exemple 1.1 :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\sin(n)}{3 - \cos(n)}$$

La suite u est bornée.

Remarque :

Une suite qui est bornée (ou majorée ou minorée) seulement à partir d'un certain rang (donc une suite u tel que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $\exists M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq M$) est bornée tout court. En effet, il manque juste à bornée $\{|u_k|, 0 \leq k \leq n_0 - 1\}$. Mais c'est un ensemble fini de valeur. Donc il admet un maximum. Et donc u est bornée (prendre le max entre M et le $\max_{0 \leq k \leq n_0 - 1} |u_k|$).

1.2 Opérations sur les suites réelles

Définition 1.4 (Opérations (naturelles) sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) :

On définit les opérations suivantes sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- (i) $\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u + v = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [Addition]
- (ii) $\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, uv = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [Multiplication]
- (iii) $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u = \lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [Loi de composition externe]

Les opérations se font donc termes à termes.

Proposition 1.3 (Propriétés algébriques des opérations) :

Les deux opérations sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ héritent des propriétés des opérations correspondantes sur $\mathbb{R}$. Donc $+$ est associative, commutative, admet la suite nulle comme élément neutre, est symétrisable ; $\times$ est associative, commutative, distributive sur $+$, admet la suite constante égale à 1 comme élément neutre, etc.

Proposition 1.4 (Opérations sur des suites bornées) :

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si u et v sont bornées alors $u + v$, uv et λu sont bornées.

Démonstration :

On suppose que $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq N$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M + N$ donc $u + v$ est bornée. On a aussi $|\lambda u_n| = |\lambda| |u_n| \leq |\lambda| M$. Donc λu est aussi bornée. Et finalement $|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq MN$. Ce qui termine la démonstration. $\square$

1.3 Suites réelles et relation d'ordre

Définition 1.5 (Croissance, Décroissance) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que

- u est croissante (resp. strictement croissante) ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).
- u est décroissante (resp. strictement décroissante) ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).
- u est monotone (resp. strictement monotone) ssi u est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Donc une suite monotone, est une suite que l'on sait être croissante ou décroissante mais pour laquelle on ne sait pas dire si c'est l'un ou l'autre. Bien sûr, une suite croissante est en particulier monotone. Et pareil pour une suite décroissante.

Proposition 1.5 (Opérations et suites monotones) :

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) Si u et v sont monotones de même monotonie, alors $u + v$ est monotone de même monotonie.
- (ii) Si $\lambda \geq 0$ et si u est monotone, alors λu est monotone de même monotonie.
- (iii) Si $\lambda \leq 0$ et si u est monotone, alors λu est monotone de monotonie contraire.
- (iv) Si u et v sont monotones de même monotonie et positives, alors uv est monotone de même monotonie.
- (v) Si u et v sont monotones de même monotonie et négative, alors uv est monotone de monotonie contraire.

Démonstration :

On ne va faire que les deux derniers points qui sont les plus durs (et pas très durs).

Il faudrait faire les quatre cas. On ne va en faire qu'un seul. Supposons u et v croissante et u et v négative. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 0$ et $v_n \leq v_{n+1} \leq 0$. Donc $0 \leq -u_{n+1} \leq -u_n$ et $0 \leq -v_{n+1} \leq -v_n$. On en déduit donc, en multipliant terme à terme, $0 \leq u_{n+1}v_{n+1} \leq u_nv_n$. Donc la suite uv est décroissante. $\square$

1.4 Limites d'une suite réelle

1.4.1 Limite finie

Définition 1.6 (Suite convergente, divergente $[\checkmark]$) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Le réel ℓ est la limite de la suite u .

- On dit que la suite u converge si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que u converge vers ℓ .
- Si u n'est pas convergente, on dira qu'elle diverge.
- Si u converge vers ℓ , on notera alors $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{+\infty} u = \ell$ ou alors (et de préférence) $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Formellement, la suite diverge si $\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - \ell| > \varepsilon$. Autrement dit, pour toutes valeurs de limites potentielles ℓ , il existe une distance ε , pour laquelle, pour n'importe quel rang que l'on considère, on trouvera un rang un peu plus loin dont le terme sera à distance de plus de ε de ℓ .

Cette formalisation de la divergence est peu utile en pratique. Ce n'est pas avec ça qu'on démontre pratiquement qu'une suite diverge. Néanmoins, elle peut s'avérer utile dans un raisonnement par l'absurde par exemple.

Remarque :

L'inégalité $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ est équivalente à $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. Donc u_n est une approximation de ℓ à ε près. Donc dire que (u_n) tend vers ℓ revient à dire qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.



Attention, l'entier n_0 introduit dans la définition ci-dessus dépend de ε . Changer de ε forcera le changement de n_0 (a priori). On peut le noter n_ε pour bien le spécifier et ne pas oublier la dépendance en ε .

Remarque :

A propos des notations de la définition. Elles ne s'utilisent pas de la même manière. Pour pouvoir écrire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, il faut au préalable avoir étudié la convergence de la suite. Si la suite ne converge pas, on ne peut pas écrire une telle chose, cela n'a pas de sens. Par contre, l'écriture $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ permet de pouvoir faire les deux en même temps. C'est un calcul. C'est une opération que l'on est en train de faire. C'est faire tendre n vers l'infini et regarder ce qu'il se passe, c'est actif. On peut toujours se poser cette question. Elle permet de pouvoir étudier la limite et de donner la valeur en même temps si la limite existe.

Alors que la notation $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est une formulation passive. C'est la limite. Il faut donc elle existe pour pouvoir en parler. On ne fait pas tendre n vers l'infini dans cette notation.

En fait, les deux notations n'ont pas la même utilisation grammaticale. C'est un peu comme un nom et un adverbe. Il peuvent signifier plus ou moins la même chose, mais ne s'utilisent pas dans les mêmes structures de phrases.

Remarque :

Dans la définition, on ne donne aucune contrainte sur ε . En réalité, les cas intéressants sont ceux où ε est petit. On pourrait donc remplacer le " $\forall \varepsilon > 0$ " de la définition par " $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ " (montrer que les deux définitions sont équivalentes).

Exemple 1.2 :

Montrer que la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 1.6 (Convergence vers ℓ se ramène à une convergence vers 0 [✓]) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \iff |u_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Cette proposition est très importante. Dans la pratique des exos théoriques, c'est cette proposition qu'on utilise pour montrer qu'une suite est convergente. C'est d'une façon plus générale plus facile de montrer que $|u_n - \ell|$ tend vers 0 que montrer que u tend vers ℓ directement.

Démonstration :

Ce n'est qu'un changement de point de vue dans la définition de la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Théorème 1.7 (Unicité de la limite [✓]) :

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si u converge, alors $\exists! \ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

Autrement dit, si u converge, sa limite est unique. u ne peut converger vers qu'une seule valeur. Se qui justifie le fait qu'on ne parle que de la LA limite ou de SA limite pour une suite. On justifie l'emploi des articles définis a posteriori. Et ça justifie également les notations qui sinon, étaient ambiguës.

Démonstration :

Il n'y a que l'unicité à démontrer. Supposons donc que u converge vers ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$ (on raisonne par l'absurde). Soit $\varepsilon = \frac{1}{4}|\ell_1 - \ell_2| > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ et $|u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$. Dans ce cas $|\ell_1 - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leq 2\varepsilon$. On a donc $2|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - \ell_2|$ qui est équivalent à $|\ell_1 - \ell_2| \leq 0$ ce qui est impossible puisque $\ell_1 \neq \ell_2$ par hypothèse.



□

Proposition 1.8 (Toute suite convergente est bornée [✓]) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si u converge alors elle est bornée.

Démonstration :

Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u \in \mathbb{R}$. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq 1$. On a donc $\forall n \geq n_0$,

$\ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$. Or $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \{u_n, n < n_0\} \cup \{u_n, n \geq n_0\}$. On vient de montrer que $\{u_n, n \geq n_0\}$ est borné. Il suffit donc de montrer que $\{u_n, n < n_0\}$ est borné. Mais c'est un ensemble fini. Donc $\max_{0 \leq n < n_0} u_n$ et $\min_{0 \leq n < n_0} u_n$ existent, donc $\{u_n, n < n_0\}$ est borné et donc u est borné. $\square$

Proposition 1.9 (Bornes d'une suite à partir d'une borne de la limite [✓]) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente vers ℓ et $a, b \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $a < \ell$, alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, a < u_n$.
- (ii) Si $\ell < b$, alors $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, u_n < b$.
- (iii) Si $a < \ell < b$, alors $\exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_3, a < u_n < b$.



ATTENTION! Cette proposition devient fausse avec des inégalités larges : la suite $((-1)^n/n)_{n \geq 1}$ tend vers $\ell = 0 \geq 0$ mais on ne peut pas dire qu'elle est à terme positif à partir d'un certain rang.

Démonstration :

1. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a < \ell - \varepsilon$ (i.e. $\varepsilon \in]0, \ell - a[$). On sait $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, a < \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$.
2. Ce point est rigoureusement symétrique.
3. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a < \ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon < b$, i.e. $\varepsilon \in]0, \min(\ell - a, b - \ell)[$. Alors $\exists n_3 \in \mathbb{N}$ tel que $a < \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon < b$ pour tout $n \geq n_3$.

$\square$

Théorème 1.10 (Passage à la limite dans les inégalités [✓]) :

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$.

Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Autrement dit si $u_n \leq v_n$ APCR, alors $\ell \leq \ell'$, par passage à la limite.

Démonstration :

On va démontrer ce résultat par contraposition. Supposons donc que $\ell > \ell'$. On pose $a = \frac{\ell + \ell'}{2} \in]\ell', \ell[$. Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_1, u_n > a$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, v_n < a$. Dans ce cas, pour tout $n \geq n_3 = \max(n_1, n_2)$, on a $v_n < a < u_n$. Donc à partir du rang n_3 , on a $v_n < u_n$. CQFD. $\square$



Ce théorème devient faux en prenant des inégalités strictes. En passant à la limite, les inégalités strictes deviennent large. Le passage à la limite fait perdre du contrôle et donc de la précision et donc les inégalités strictes deviennent large : avec $u_n = 1/n$ et $v_n = -1/n$, on a $u_n < v_n$ mais en passant à la limite $0 \leq 0$.

On peut alors donner une caractérisation séquentielle de la borne sup (ou inf) dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.11 (Caractérisation séquentielle de la borne sup et borne inf d'une partie de $\mathbb{R}$) :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. minorée). Alors

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \alpha \text{ est un majorant (resp. minorant) de } A \\ \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \end{cases}$$

Démonstration :

On va démontrer le cas de la borne inf. Celui de la borne sup se fait exactement de la même manière (ou se déduit en prenant les opposés). On va bien sûr utiliser la caractérisation de la borne inf dans $\mathbb{R}$ avec des ε .

$\Rightarrow$ Il suffit pour ce sens de prouver la seconde ligne. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n = \frac{1}{n+1}$ (ou toute autre suite tendant vers 0). Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on sait $\exists a_n \in A$ tel que $\alpha \leq a_n < \alpha + \varepsilon_n = \alpha + \frac{1}{n+1}$. On a donc une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ par théorème des gendarmes (qu'on va rappeler plus bas).

$\Leftarrow$ Dans ce sens, il suffit de montrer la seconde ligne de la caractérisation de la borne sup dans $\mathbb{R}$ avec des ε . Soit donc $\varepsilon > 0$. Comme il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$, on sait en particulier que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - \alpha| < \varepsilon$, ce qui implique $\forall n \geq n_0, \alpha - \varepsilon < u_n < \alpha + \varepsilon$. Mais comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A$, on a toujours $u_n \geq \inf A = \alpha$. D'où $\forall n \geq n_0, \alpha \leq u_n < \alpha + \varepsilon$. En particulier, on sait qu'il existe $a \in A$ (en fait, on en a une infinité mais il suffit d'en choisir un) tel que $\alpha \leq a < \alpha + \varepsilon$. D'où α est bien la borne inf de A . $\square$

Exemple 1.3 :

Montrer que $\sqrt{2} = \sup\{r \in \mathbb{Q}, r^2 \leq 2\}$.

1.4.2 Limites infinies

Définition 1.7 (Suite tendant vers $+\infty$ et $-\infty$ [$\checkmark$]) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On dit que la suite u tend vers $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \geq A$. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite u tend vers $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq A$. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Remarque :

Ici aussi, les cas intéressants ne sont que ceux avec A "grands". On pourrait remplacer donc la condition $\forall A \in \mathbb{R}$ par $\forall A > 1$ par exemple. Ou plus grand que n'importe quel autre constante.

Proposition 1.12 (Limites infinies et minoration/majoration) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $u \xrightarrow{+\infty}$, alors u est minorée et non majorée.
2. Si $u \xrightarrow{-\infty}$, alors u est majorée et non minorée.

Démonstration :

On ne va traiter que le premier point. Le second s'obtenant de la même manière ou en posant $v = -u$ qui tendra alors vers $+\infty$.

Par définition du fait que u tende vers $+\infty$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, u_n \geq 1$. Donc $\{u_n, n \geq n_0\}$ est minoré par 1. On a alors facilement que u est minoré par $\min(u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, 1)$.

Il reste à montrer que u n'est pas majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, u_n \geq M + 1$. Donc M n'est pas un majorant de u et ce quelque ce soit le M que le considère. $\square$



On pourrait être tenté de vouloir utiliser les réciproques. ON NE DOIT PAS!! Les réciproques sont FAUSSES! Ce n'est pas parce qu'une suite est minorée et non majorée qu'elle tend vers l'infini. Prendre la suite $u_n = n(1 + (-1)^n)$. Elle est non majorée, minorée par 0, mais ne diverge pas vers $+\infty$. Elle vaut 0 une fois sur deux.

Définition 1.8 (Divergence vers $\pm\infty$, Divergence) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Si $u \xrightarrow{+\infty} +\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que la suite u diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
- Si u n'est pas convergente et ne diverge pas vers l'infini, on dira alors que u est divergente.

En résumé, une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ peut (dans l'ordre de ce qui est préférable)

- Converger vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.
- Diverger vers $\pm\infty$.
- Diverger sans limite.

Définition 1.9 (Nature d'une suite) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Étudier la nature de u correspond à étudier la convergence ou divergence de la suite.

1.4.3 Opérations sur les suites admettant des limites

Lemme 1.13 (Somme d'une suite minorée et d'une suite divergente vers $+\infty$) :

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si u est minorée et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Démonstration :

Soit $m \in \mathbb{R}$ un minorant de u . Soit aussi $A \in \mathbb{R}$. alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, v_n \geq A - m$. Alors dans ce cas, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n + v_n \geq m + v_n \geq m + A - m = A$. Donc $u + v$ tend vers $+\infty$. $\square$

Proposition 1.14 (Comportement d'une somme de suites) :

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell + \ell'$
2. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
3. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$
4. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
5. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

Démonstration :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |v_n - \ell'| \leq \varepsilon/2$.
Alors, pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, $|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \varepsilon$. CQFD.
2. Les autres points découlent du lemme 1.13.

□

Les autres cas que l'on peut rencontrer sont des "formes indéterminées". Il convient de lever l'indétermination pour déterminer la convergence (ou la divergence et par suite la limite), c'est à dire de modifier l'expression de $u_n + v_n$ en factorisant, simplifiant ou autres méthodes pour avoir une autre expression sans forme indéterminée. L'indétermination ne provient que de la forme de $u_n + v_n$. Ce qui ne veut absolument pas dire qu'on ne peut pas déterminer la nature de $u + v$.

Remarque :

La proposition précédente est un résultat de convergence. Il permet de justifier la convergence de suites et donne, en plus, la limite en fonction des limites des suites dont elle s'exprime. Mais la limite est un bonus. Ce résultat permet avant tout de justifier de convergences (ou divergences) de certaines suites.



Ce ne sont que des implications ! Attention aux raisonnements de type Shadok ! Ce n'est pas parce que $u + v$ converge que forcément u et v convergent aussi. Les deux suites se compensent l'une l'autre pour que la somme des deux converge. Mais on peut très bien avoir des suites divergentes au départ. Il suffit de prendre $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ ou encore $u_n = n + 1$ et $v_n = -n$.

Définition 1.10 (Forme indéterminée) :

Si l'on a deux suites dont on connaît le comportement asymptotique, toute opérations à partir de ces deux suites qui ne se trouve pas dans l'un des cas énoncés dans cette section est ce qu'on appelle une *forme indéterminée*.

Remarque :

Les théorèmes de cette section ne permettent, a priori, de pouvoir conclure sur le comportement d'une forme indéterminée.

Attention au sens des mots ! On ne peut pas conclure pour le comportement de la suite, SOUS CETTE FORME ! C'est la forme qui est indéterminée. Sous une autre forme, l'indétermination peut être levé et on peut (peut être) conclure sur la nature de la suite.

Exemple 1.4 :

On ne peut pas conclure sur la nature de la suite $(\ln(n^2) - \ln(n))$ écrit sous forme là. C'est une forme indéterminée. Mais en changeant l'écriture, si on se ramène à $(\ln(n))$, la forme n'est plus indéterminée et on peut conclure sur la nature de la suite. Comme il y a unicité de la limite, le comportement ne dépend pas de la forme sous laquelle on écrit la suite, et seulement de la suite elle-même.

Le but de la suite du cours (des cours) va être de donné des outils pour pouvoir étudier plus précisément le comportement asymptotique d'une suite. À la fin de l'année il n'existera plus aucune suite (ou presque) dont on ne pourra pas donner la nature.

Il s'agit donc de lever les indéterminations lorsqu'on en trouve une et ne pas les laisser telle quelle.

Lemme 1.15 (Produit d'une suite minorée positive par une suite divergente vers $+\infty$)

:

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec u minorée par $\rho > 0$ à partir d'un certain rang.

1. Si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. Si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ alors $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Démonstration :

On ne va montrer que le premier point. Le second étant radicalement similaire.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, v_n \geq A/\rho$. Pour $n \geq n_0$, on a donc $u_n v_n \geq \rho v_n \geq A$. CQFD. $\square$

Proposition 1.16 (Produit d'une suite bornée et d'une suite convergente vers 0) :

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Démonstration :

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |v_n| \leq \varepsilon/M$.
Et alors $\forall n \geq n_0, |u_n v_n| \leq \varepsilon$. $\square$

Proposition 1.17 (Comportement du produit de suites) :

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell' \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \ell'$$

2.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \neq 0 \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right\} \implies u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$$

3.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \neq 0 \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \end{array} \right\} \implies u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -\infty & \text{si } \ell > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$$

4.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right\} \implies u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

5.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right\} \implies u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

6.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \end{array} \right\} \implies u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de u . On sait aussi $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon/(2|\ell'|)$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, |v_n - \ell'| \leq \varepsilon/(2M)$. Alors, pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, $|u_n v_n - \ell \ell'| \leq |u_n| |v_n - \ell'| + |\ell'| |u_n - \ell| \leq$

$\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. CQFD.

Les points suivants se déduisent du lemme 1.15. □

Les autres cas (essentiellement $0 \times \pm\infty$) sont des formes indéterminées. Là encore, le jeu est de modifier l'expression de $u_n v_n$ pour lever l'indétermination.

Il faut bien comprendre qu'une forme indéterminée est entièrement tributaire de l'expression que l'on a sous les yeux. Changer de forme peut faire introduire une nouvelle forme indéterminée ou (c'est le but) en faire disparaître une. C'est la forme qui est indéterminée. Par le type de convergence.

Exemple 1.5 :

Étudier la limite de la suite $(n^2 - n)_{n \in \mathbb{N}}$.

!!! ATTENTION !!!



On rappelle que lors de l'étude de la limite d'une suite, il ne faut pas écrire des calculs sous la forme $\lim() = \lim()$ etc. En effet, cette écriture présume déjà que la limite existe. Ce qui, en général, n'est pas établi à l'avance. On ne sait pas encore qu'elles existent en général puisque c'est ce que l'on veut établir.

Définition 1.11 ($\ell^\pm$) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell^+$ pour dire $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et $u_n \geq \ell$ à partir d'un certain rang.
- On note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell^-$ pour dire $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et $u_n \leq \ell$ à partir d'un certain rang.

Proposition 1.18 (Comportement de l'inverse d'une suite) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors

1. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \neq 0$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell}$
2. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
3. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^-$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$
4. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$
5. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^-$

Démonstration :

1. Soit $\varepsilon > 0$. On sait donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Alors

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \left| \frac{\ell - u_n}{\ell u_n} \right| \leq \frac{|u_n - \ell|}{|\ell u_n|} \leq \frac{\varepsilon}{|\ell| |u_n|}$$

Or on a aussi $|\ell| > |\ell|/2$. Donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_1, |u_n| > |\ell|/2$. Donc pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\ell| \times |\ell|/2} = \frac{2\varepsilon}{\ell^2}$$

Donc $(1/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $1/\ell$.

2. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq 1/A$. Mais on a aussi $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_1, 0 < u_n$. On en déduit, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, $0 < u_n \leq 1/A$. D'où $\frac{1}{u_n} \geq A$. CQFD.
3. Les autres points sont similaires.

□

Théorème 1.19 (Passage à la limite dans les compositions) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \in I$.

Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Démonstration :

Cette démonstration sera faite dans le chapitre sur la continuité. On a besoin de la définition de la limite d'une fonction pour ça. □

Remarque :

On notera que dans ce résultat, f n'a pas besoin d'être continue. Elle a juste besoin de converger ou diverger en a . C'est tout. La continuité sera intéressante pour la réciproque. Mais ça ne nous est pas utile pour le moment.

Remarque :

Cette proposition est à mettre en relation avec la caractérisation séquentielle de la continuité que nous verrons un peu plus tard. La caractérisation séquentielle de la continuité n'est que le mélange de la caractérisation de la continuité par les limites et du théorème précédent.

Exemple 1.6 ([√]) :

Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

1.4.4 Récapitulatifs**Limite d'une somme**

$\lim u$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u+v)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim u$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim v$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim uv$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient avec une limite $\neq 0$ au dénominateur

$\lim u$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim v$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
$\lim u/v$	ℓ/ℓ'	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient avec une limite nulle au dénominateur

$\lim u$	$u_n > 0$ APCR	$u_n > 0$ APCR	$u_n < 0$ APCR	$u_n < 0$ APCR	0
$\lim v$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim u/v$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

1.5 Étude de limite par comparaison

Dans cette partie, on donne des théorèmes de convergences permettant de déterminer si une suite est convergente.

Théorème 1.20 (Théorème des gendarmes [✓]) :

Soit $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que :

- (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies v_n \leq u_n \leq w_n$
- (ii) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{+\infty} u = \ell$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \geq n_0$. Alors

$$|u_n - \ell| \leq \max(|v_n - \ell|, |w_n - \ell|)$$

Or $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. Donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, |v_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, |w_n - \ell| \leq \varepsilon$. On pose alors $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Alors $\forall n \geq n_3$, on a $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $|w_n - \ell| \leq \varepsilon$. D'où, pour tout $n \geq n_3$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ et donc u est convergente et u converge vers ℓ . $\square$

Remarque :

Le théorème des gendarmes est un théorème de convergence au sens où il donne la nature d'une suite. Il ne donne pas directement la valeur de la limite. C'est une conséquence immédiate. Mais c'est un théorème abstrait qui permet de connaître la nature d'une suite.

Exemple 1.7 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite de $u_n = \frac{|nx+1|}{n+1}$.

Remarque :

Attention ! Il ne faut PAS rédiger

$$u_n \leq v_n \leq w_n \text{ donc } \lim u \leq \lim v \leq \lim w \text{ or } \lim u = \lim w = \ell \in \mathbb{R} \text{ donc } \lim v = \ell.$$

Ce raisonnement présuppose en fait déjà l'existence des trois limites (et en particulier celles de v_n). Or le but de ce théorème est justement d'en déduire la convergence de v_n . On ne peut donc pas écrire "lim v_n " tant que l'on ne sait pas que cela à un sens.

En fait, les arguments sont mis dans le mauvais sens. Il faut écrire

$u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim u = \lim w = \ell \in \mathbb{R}$ donc v converge et $\lim v = \ell$ par théorème des gendarmes.

Et là les arguments sont dans le bon ordre. On commence par montrer qu'on a les hypothèses du théorème des gendarmes, puis on l'applique et on conclut. Attention à l'ordre dans lequel on présente les choses. Les arguments ne sont pas commutatifs. Il ne suffit pas que tous les arguments soient présents. Ils doivent être dans le bon ordre logique pour que ça fonctionne. On ne peut pas mettre la conclusion d'une proposition au milieu des hypothèses.

Corollaire 1.21 (Corollaire du théorème des gendarmes) :

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq v_n$.

Si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. On suppose donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - \ell| \leq v_n$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, |v_n| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, $|u_n - \ell| \leq v_n \leq \varepsilon$. $\square$

Dans la pratique, c'est ce corollaire qui est le plus utile. Souvent, les opérations sur les limites sont insuffisantes et ne permettent pas d'établir la convergence de (u_n) . La majoration de $|u_n - \ell|$ peut alors permettre, via ce théorème, de résoudre le problème. Mais il faut pouvoir majorer la valeur absolue de la différence. Ce qui n'est pas toujours évident non plus.

C'est l'un des corollaires du théorème des gendarmes. Il y en a plusieurs. On va en donner quelques uns parmi les plus utiles.

Exemple 1.8 :

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sin n}{n + 1} = 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{n^2 + k} = 0$$

Théorème 1.22 (Version du théorème des gendarmes de limite infinie) :

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u$ existe et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u = +\infty$, alors (v_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
2. Si (v_n) diverge avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors (u_n) diverge avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Ce théorème est la version du théorème des gendarmes pour les branches infinies.

Démonstration :

C'est facile. Il suffit de prendre la définition d'une limite infinie. □

Exemple 1.9 :

Étudier la limite de

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Théorème 1.23 (Théorème de la limite monotone [✓]) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si u est croissante, alors

- (i) u est convergente ssi elle est majorée, et dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} u = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$.
- (ii) Si u n'est pas majorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si u est décroissante, alors

- (i) u est convergente ssi elle est minorée, et dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} u = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$
- (ii) Si u n'est pas minorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration :

Soit donc $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante. Supposons que u est majorée. Alors $\sup u$ existe. On pose $\alpha = \sup u$. Par caractérisation de la borne sup dans $\mathbb{R}$, on sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$. Mais comme u est croissante, par récurrence immédiate, on a $\forall n \geq n_0, \alpha - \varepsilon < u_n < \alpha + \varepsilon$, i.e. $|u_n - \alpha| < \varepsilon$ et donc u converge vers $\alpha = \sup u$.

Réciproquement, supposons seulement que u est croissante et convergente. Donc elle est bornée par 1.8 et donc en particulier majorée.

Finalement, si u est croissante et non majorée. Donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} \geq A$. Alors, par récurrence facile, $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} \geq A$. Donc u tend vers $+\infty$.

Le cas décroissant se déduit du cas croissant en passant aux opposés. □

Remarque :

On peut donner des formulations raccourcies de ce théorème :

Toute suite croissante est convergente si, et seulement si, elle est majorée.

Toute suite décroissante est convergente si, et seulement si, elle est minorée.

Les autres points du théorème précédent sont alors des conséquences directes de ces énoncés. Il sont l'avantages d'être plus court, mais moins précis.

Exemple 1.10 :

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est convergente.

Définition 1.12 (Suites adjacentes [✓]) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
2. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
3. $(u_n - v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Théorème 1.24 (Suites adjacentes sont convergentes [✓]) :

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes.

Alors u et v sont convergentes de même limite ℓ et en plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$.

Démonstration :

Comme $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on sait $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |u_n - v_n| \leq 1$, ce qui implique $u_n \leq v_n + 1$ et $u_n - 1 \leq v_n$. Mais (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$ et $v_n \leq v_0$ (récurrence facile). On en déduit donc $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n + 1 \leq v_0 + 1$ et $v_n \geq u_n - 1 \geq u_0 - 1$. Donc (u_n) est croissante et majorée et (v_n) est décroissante et minorée. Donc par théorème de la limite monotone, (u_n) et (v_n) sont convergentes vers $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Finalement, les opérations sur les limites nous permettent de dire que $(u_n - v_n)$ est convergente vers $\ell - \ell'$. Mais on sait que cette suite converge vers 0, ce qui nous permet de conclure, par unicité de la limite, $\ell = \ell'$. $\square$



La nature de suites adjacentes est une conséquence de la définition. Ça ne fait pas partie de la définition. L'adjacence est un moyen pour déterminer la nature de suites. Attention à ne pas confondre la définition et la conséquence de la définition.

Exemple 1.11 :

Montrer que les suites

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

sont convergentes.

1.6 Suites arithmético-géométriques

Définition 1.13 (Suite arithmético-géométrique) :

On appelle suite arithmético-géométrique de raison q et $r \in \mathbb{R}$ toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n + r$$

Proposition 1.25 (Expression explicite d'une suite arithmético-géométrique) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de raison q et r .

1. Si $r = 0$, la suite est dite géométrique de raison q et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.
2. Si $q = 1$, la suite est dite arithmétique de raison r et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
3. Si $q \neq 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} r$.

Cette proposition n'est pas à utiliser telle quelle. Il faut refaire la démonstration dans le cas particulier de la suite qui nous intéresse. La démonstration est une méthode à appliquer.

Démonstration :

1. Si $r = 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$ par récurrence.

2. Si $q = 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ par récurrence.
3. Si $q \neq 1$, on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite v définie par $v_n = u_n - \alpha$ soit géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - \alpha \\
 &= qu_n + r - \alpha \\
 &= q(u_n - \alpha) + r - \alpha + q\alpha \\
 &= qv_n + r - \alpha + q\alpha
 \end{aligned}$$

Pour que la suite v soit géométrique, il faut et il suffit d'avoir $r - \alpha(1 - q) = 0$, c'est à dire $\alpha = \frac{r}{1-q}$. Et dans ce cas, v est une suite géométrique de raison q , donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = q^n v_0 = q^n \left(u_0 + \frac{r}{q-1}\right) = u_n + \frac{r}{q-1}$. D'où l'on déduit $u_n = q^n \left(u_0 + \frac{r}{q-1}\right) - \frac{r}{q-1} = q^n u_0 + \frac{q^n - 1}{q-1} r$. □

Cette démonstration fournit donc en plus une méthode (et c'est ce qu'il faut retenir), pour étudier les suites arithmético-géométrique. Si u est arithmético-géométrique, on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v = u - \alpha$ soit géométrique. On en déduit alors l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n . La convergence se termine par croissance comparée (voir plus bas).

Exemple 1.12 :

Déterminer l'expression du terme général de la suite u définie par $u_{n+1} = 3u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.26 (Transformation suite géo en suite arith) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\ln(q)$.

Démonstration :

Laissée en exercice. Très facile. □

L'avantage de cette proposition est qu'elle permet de passer d'une suite géométrique à une suite arithmétique si vous êtes plus à l'aise avec ces dernières. Et ça marche bien sûr aussi dans l'autre sens, mais sans restrictions d'aucunes sortes sur la suite arithmétique qu'on considère. Il suffit de prendre l'exponentielle de la suite dans l'autre sens.

Attention, il est absolument vital que tous les termes de la suite soit > 0 pour utiliser cette proposition. Il faudra bien faire attention à le vérifier avant de prendre le log de la suite. Et il ne suffit pas de vérifier que la raison est > 0 .

Proposition 1.27 (Convergence d'une suite arithmétique) :

Soit u une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

1. La suite u diverge vers $+\infty$ si, et seulement si, $r > 0$.
2. La suite u diverge vers $-\infty$ si, et seulement si, $r < 0$.
3. La suite u est constante égale à u_0 si, et seulement si, $r = 0$.

Démonstration :

C'est pas très dur. Par opération sur les limites, il suffit en fait d'étudier la suite $(rn)_{n \in \mathbb{N}}$. Et il est pas très dur de montrer la proposition à partir de là. $\square$

Lemme 1.28 :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x > -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Démonstration :

On étudie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le signe de la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx$. C'est un polynôme donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n((1+x)^{n-1} - 1)$ qui ne s'annule que en 0. Le signe de f'_n sur $] -\infty, -1[$ va dépendre de la parité de n , mais $\forall x \geq 0$, on a $f'_n(x) > 0$ et $\forall x \in] -1, 0[$, $f'_n(x) < 0$. Donc la fonction f_n est décroissante sur $] -1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$ et $f_n(0) = 0$ ce qui termine la démonstration. $\square$

Proposition 1.29 (Convergence d'une suite géométrique $[\sqrt{\}]$) :

Soit u une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

1. Si $u_0 = 0$, la suite est constante égale à 0.
2. Si $u_0 \neq 0$, alors :
 - Si $q > 1$, la suite diverge vers $\text{sign}(u_0) \times \infty$
 - Si $q = 1$, la suite est constante égale à u_0
 - Si $-1 < q < 1$, la suite converge vers 0 (si $q = 0$, la suite est constante égale à 0)
 - Si $q \leq -1$, la suite n'a pas de limite.

Démonstration :

On se place dans le cas $u_0 \neq 0$ qui est le seul cas où il y a un peu de travail à faire et on étudie seulement la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a alors, en notant $r = |q| - 1$, $r > -1 \iff |q| > 0$ et donc $|q|^n = (r + 1)^n \geq 1 + nr$ dès que $q \neq 0$. On se ramène donc à l'étude d'une suite arithmétique de raison r que l'on doit ensuite adapter à (q^n) en prenant en compte le signe de q . $\square$

1.7 Suites récurrentes

Définition 1.14 (Suites récurrentes d'ordre p) :

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite. On dit que (u_n) est une suite récurrente d'ordre p s'il existe une fonction de p variable $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1})$.

Donc un terme de la suite est déterminé à partir des p précédents. Il suffit donc de connaître seulement les p premiers termes pour connaître entièrement la suite.

Dans le cadre de notre programme, seul les suites récurrentes d'ordre 1 et les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vont nous intéresser.

Définition 1.15 (Suites récurrentes linéaire, Équation caractéristique) :

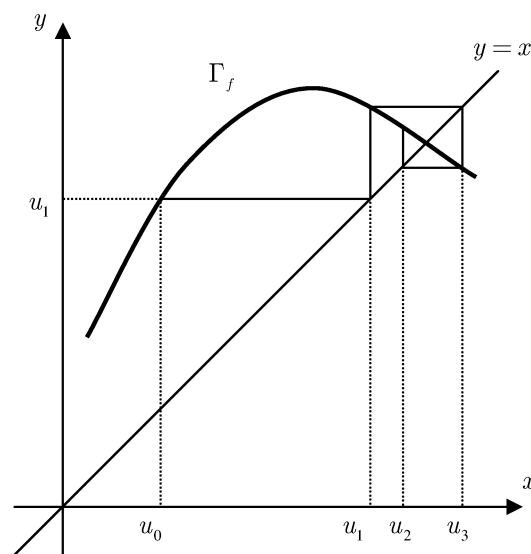
Soit (u_n) une suite numérique de $\mathbb{R}$ (réelles ou complexes). (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si il existe $a_0, a_1, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + a_{p-2}u_{n+p-2} + \dots + a_2u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_0u_n = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}$.

On définit alors l'équation caractéristique de la suite (u_n) par $r^p - a_{p-1}r^{p-1} - \dots - a_1r - a_0 = r^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k r^k = 0$.

Donc une suite récurrente linéaire d'ordre p est une suite récurrente d'ordre p pour laquelle la fonction définissant la récurrence est linéaire.

1.7.1 Suites récurrentes d'ordre 1 [✓]

Une suite récurrente d'ordre 1 est une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour une certaine fonction f . Graphiquement, on a



La droite $y = x$ permettant de “rabattre” les termes de la suite calculés (lu sur l’axe des ordonnées) sur l’axe des abscisses.

Définition 1.16 (Intervalle stable, Point fixe $[\checkmark]$) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- On appelle intervalle stable de f un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$, i.e. tel que $\forall x \in I$, $f(x) \in I$
- On appelle point fixe de f , un réel x stable par f , i.e. un réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$.

Exemple 1.13 :

Déterminer des intervalles stable et des points fixes aux fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \cos(x)$.



Attention, un intervalle stable est un intervalle globalement fixé par f . Ce n’est pas forcément un intervalle sur lequel la fonction correspond à l’identité.

Proposition 1.30 (Condition suffisante d'existence d'une suite récurrente d'ordre 1 [✓]) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle stable pour f et soit (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors la suite (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

Démonstration :

Récurrence facile □

Proposition 1.31 (Variation d'une suite récurrente d'ordre 1 [✓]) :

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow D$ et la suite (u_n) définie par $u_0 \in D$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- (i) Si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone et son sens de variation est déterminé par le signe de $u_1 - u_0$.
- (ii) Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variations différents

Démonstration :

- (i) Supposons $u_1 - u_0 \geq 0$. Alors $u_2 = f(u_1) \geq u_1 = f(u_0)$ car f est croissante. Et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$. Donc la suite est croissante.

Si au contraire $u_1 - u_0 \leq 0$, alors le même raisonnement nous donnera la décroissance de la suite (u_n) . Dans les deux cas, la suite est monotone de monotonie déterminé par la position relative de u_0 et u_1 .

- (ii) Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante. Or $f \circ f(u_n) = f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. Donc les suites définies par $v_0 = u_0$ et $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $w_0 = u_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = f \circ f(w_n)$ sont monotones. Une récurrence facile nous permet alors de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Donc les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Enfin, si (v_n) est croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{2n+2} \geq u_{2n} = v_n$. En composant par f , on trouve, $\forall n \in \mathbb{N}, f(v_{n+1}) = u_{2n+3} = w_{n+1} \leq u_{2n+1} = w_n = f(v_n)$ donc la suite (w_n) est décroissante. Inversement, si la suite (v_n) est décroissante, le sens des inégalités est inversé et on trouve la suite (w_n) croissante. □

Proposition 1.32 (Limite d'une suite récurrente d'ordre 1 [✓]) :

Soit $f : D \rightarrow D$ continue et (u_n) une suite définie par $u_0 \in D$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est un point fixe de f , i.e. $f(\ell) = \ell$.

Démonstration :

On a $u_{n+1} = f(u_n)$. Par compositions de limites et par continuité de f , on doit avoir $\ell = f(\ell)$ donc ℓ doit être un point fixe de f . $\square$

Remarque :

Attention, il y a un point qui reste flou dans cette démonstration. En passant à la limite, on vient d'écrire $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n)$ ce qui n'est pas évident du tout. Ce point sera éclairci dans la caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction.

Exemple 1.14 :

Soit $a > 0$. Étudier la suite u définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$.

1.7.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 [✓]

On considère ici une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ d'équation caractéristique $X^2 - aX - b = 0$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Proposition 1.33 (Expression des suites récurrentes d'ordre 2 [✓]) :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On note $\Delta = a^2 + 4b$, le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$ associée à la suite.

- Si $\Delta > 0$, alors il existe deux racines réels $r_1 \neq r_2$ à l'équation caractéristique et dans ce cas, on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ déterminés par les valeurs de u_0 et u_1 .

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une racine réelle double r_0 et dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ déterminés par les valeurs de u_0 et u_1 .

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjugués $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, et dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \rho^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$ déterminés par les valeurs de u_0 et u_1 .

Attention, ici on ne considère que des suites à valeurs réelles. Il faut donc, dans un premier temps que les coefficients de la relation de récurrence soient réels, et que les valeurs de u_n soient aussi réelles. Si on avait considérés des suites complexes, les choses (surtout dans le dernier cas) seraient différentes. Voir plus bas pour ce cas.

Démonstration :

Soit r_1 et r_2 deux solutions complexes de l'équation caractéristique (avec éventuellement $r_1 = r_2$). Alors (r_1^n) et (r_2^n) sont deux suites satisfaisant la relations de récurrence. En effet, comme on a $r_1^2 = ar_1 + b$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, r_1^{n+2} = ar_1^{n+1} + br_1^n$ en multipliant simplement par r_1^n . De même pour r_2 . On en déduit alors facilement que les formes des suites proposées dans l'énoncé vont alors également satisfaire la relation de récurrence.

Il faut donc maintenant montrer la réciproque. C'est à dire que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \geq 0$, alors la suite est de l'une des formes proposées.

Soit une suite u vérifiant la relation de récurrence. On note que l'une des deux racines est nécessairement non nul. En effet, si $r_1 = r_2 = 0$, alors notre équation caractéristique est simplement X^2 et donc on aurait $a = b = 0$. Ce qui contredit les hypothèses sur a et b . Quitte à renommer les racines de l'équation caractéristique, on peut supposer $r_1 \neq 0$ sans perte de généralité. Dans ce cas, on introduit la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{r_1^n}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0 &\iff r_1^{n+2}v_{n+2} - ar_1^{n+1}v_{n+1} - br_1^n v_n = 0 \\ &\iff r_1^n(r_1^2v_{n+2} - ar_1v_{n+1} - bv_n) = 0 \\ &\iff r_1^2v_{n+2} - ar_1v_{n+1} - bv_n = 0 \quad \text{car } r_1 \neq 0 \end{aligned}$$

On rappelle les relations coefficients/racines qui nous fournissent $r_1 + r_2 = a$ et $r_1 r_2 = -b$. D'où l'on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0 \iff r_1^2v_{n+2} - r_1(r_1 + r_2)v_{n+1} + r_1r_2v_n = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow r_1 v_{n+2} - (r_1 + r_2) v_{n+1} + r_2 v_n = 0 \\
&\Longleftrightarrow r_1 (v_{n+2} - v_{n+1}) = r_2 (v_{n+1} - v_n) \\
&\Longleftrightarrow v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{r_2}{r_1} (v_{n+1} - v_n)
\end{aligned}$$

Donc la suite $(v_{n+1} - v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{r_2}{r_1}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = (v_1 - v_0) \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^n$$

En sommant pour faire apparaître une somme télescopique, on trouve donc $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_0 = \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = (v_1 - v_0) \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^k$$

Il faut donc maintenant distinguer plusieurs cas en fonction de la valeur de la raison r_2/r_1 .

Si $r_1 \neq r_2$ (donc $\Delta \neq 0$). Dans ce cas, on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_0 &= (v_1 - v_0) \frac{1 - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{n+1}}{1 - \frac{r_2}{r_1}} \\
&= \frac{v_1 - v_0}{1 - r_2/r_1} - \frac{v_1 - v_0}{1 - r_2/r_1} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

On a donc $\forall n \geq 1$, $v_n = v_0 + \frac{v_1 - v_0}{1 - r_2/r_1} - \frac{v_1 - v_0}{1 - r_2/r_1} (r_2/r_1)^n$ qui est également valable pour $n = 0$.
Donc $\forall n \geq 1$, on a $r_1^n v_n = u_n = r_1^n (v_0 + \frac{v_1 - v_0}{1 - r_2/r_1}) - \frac{v_1 - v_0}{1 - r_2/r_1} r_2^n$. On pose alors $\lambda = v_0 + \frac{v_1 - v_0}{1 - r_2/r_1}$ et $\mu = \frac{v_1 - v_0}{1 - r_2/r_1}$.

Enfin si $\Delta > 0$, alors les deux racines r_1 et r_2 sont réelles et donc λ et μ également.

Si en revanche, $\Delta < 0$, alors r_1 et r_2 sont des complexes conjugués. Et comme (u_n) est une suite réelle, on a $u_n = \Re(u_n)$ ce qui aboutit à l'expression donné dans l'énoncé (petit calculs à faire sur les complexes)

Si $r_1 = r_2$. On a toujours $r_1 \neq 0$. On note alors r_0 la valeur (réelle) commune de r_1 et r_2 , i.e. on note $r_0 = r_1 = r_2$. Dans ce cas, on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_0 = (v_1 - v_0)(n + 1)$$

d'où l'on déduit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = r_0^n (v_0 + (v_1 - v_0)n)$$

On note alors $\lambda = v_0$ et $\mu = v_1 - v_0$ (qui sont deux réels). La relation précédente étant encore valable pour $n = 0$, on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n$$

□

Remarque :

On remarquera que cette démo fournit une méthode pour trouver l'expression générale de (u_n) en fonction de n . Mais on est pas obligé de suivre cette méthode. On peut également utiliser cette proposition pour gagner un peu de temps et alléger un peu les calculs.

Dans la pratique, si l'on a une suite (u_n) satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, on peut trouver les racines de l'équation caractéristique, en déduire l'expression générale de u_n en fonction de n , λ et μ et déterminer les valeurs des constantes avec les valeurs des premiers termes de la suite u_0 et u_1 . Cette méthode s'avère, en générale, moins coûteuse en énergie et en temps.

Exemple 1.15 :

Déterminer une expression en fonction de n des suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 3v_{n+1} - v_n \end{cases}$$

2 Extension aux suites complexes

2.1 Définition

Définition 2.1 (Suite complexe) :

On appelle suite complexe une application $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Une telle suite est notée z , $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (z_n) .

L'ensemble des suites complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Définition 2.2 (Suite des parties réelles et parties imaginaires, suite conjuguée) :

Soit (z_n) une suite complexe.

On appelle partie réelle de z la suite $(\Re(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Similairement, la partie imaginaire de z est la suite $\Im(z)$ de terme général $\Im(z_n)$. La suite conjuguée de z est la suite $\bar{z}$ de terme général $\bar{z}_n$ et le module de z , noté $|z|$ est la suite de terme général $|z_n|$.

Les suites $\Re(z)$, $\Im(z)$ et $|z|$ sont alors des suites réelles.

Remarque :

Les notions de suites stationnaires, constantes et les opérations sur les suites restent valides.

En revanche, on perd la notion de suite monotone, majorée et minorée (on n'a plus de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$). MAIS ! La notion de suite bornée reste valide.

Définition 2.3 (Suite complexe bornée) :

Soit (z_n) une suite complexe.

z est bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$.

Proposition 2.1 (Caractérisation suite complexe bornée [✓]) :

Soit $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

z est bornée ssi $\Re(z)$ et $\Im(z)$ sont bornées.

Démonstration :

On a $|\Re(z)| \leq |z|$ et $|\Im(z)| \leq |z|$. Ce qui fournit le sens direct. L'inégalité $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$ fournit le sens indirect. $\square$

2.2 Convergences

Définition 2.4 (Limite finie) :

Soit $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que z tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ si $|z_n - \ell|$ tend vers 0 (dans $\mathbb{R}$). On note alors $z \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ ou $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

On dit que z converge si il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $z \xrightarrow[+\infty]{} \ell$. Sinon, on dit que la suite z diverge.

Théorème 2.2 (Unicité de la limite [✓]) :

Soit $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si z converge, $\exists! \ell \in \mathbb{C}$ tel que $z \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

On note dans ce cas $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{+\infty} z$.

Démonstration :

La preuve est identique que dans le cas réel. $\square$

Il n'y a pas de notion de suite complexe tendant vers l'infini. Le soucis vient du fait qu'il y a "plusieurs infini". On peut avoir $\Re(z) \rightarrow \infty$ ou $\Im(z) \rightarrow \infty$ ou encore les deux en même temps. Ou bien $\Re(z) + \Im(z) \rightarrow \infty$ etc.

Proposition 2.3 (Passage à la limite dans les opérations complexes [✓]) :

Soit $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors :

- (i) $z \xrightarrow{+\infty} \ell \iff \bar{z} \xrightarrow{+\infty} \bar{\ell}$
- (ii) $z \xrightarrow{+\infty} \ell \implies |z| \xrightarrow{+\infty} |\ell|.$

Démonstration :

La démo est facile. □



Attention ! La réciproque est fausse ! Ce n'est pas parce que $|z| \xrightarrow{+\infty} |\ell|$ que z converge !

Par exemple, la suite $(e^{2i(n+1/n)\pi})$ ne converge pas mais la suite de son module va converger vers 1.

Théorème 2.4 :

Toute suite complexe convergente est bornée.

Démonstration :

Facile aussi □

Théorème 2.5 (Limites et opérations) :

Soit z, z' deux suites complexes. Si $z \xrightarrow{+\infty} \ell \in \mathbb{C}$ et $z' \xrightarrow{+\infty} \ell' \in \mathbb{C}$, alors $z + z' \xrightarrow{+\infty} \ell + \ell'$, $zz' \xrightarrow{+\infty} \ell\ell'$. Si $\ell \neq 0$, alors $1/z \xrightarrow{+\infty} 1/\ell$.

Démonstration :

Cf le cas réel □

Théorème 2.6 (Caractérisation de la convergence par les suites des parties réelles et imaginaires [✓]) :

Soit z une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On a équivalence entre

- (i) $z \xrightarrow{+\infty} \ell$
- (ii) $\Re(z) \xrightarrow{+\infty} \Re(\ell)$ et $\Im(z) \xrightarrow{+\infty} \Im(\ell)$.

Démonstration :

Pas dur

□

Exemple 2.1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n - \overline{u_n}}{3}$.

Étudier la nature de (u_n) .

2.3 Cas des suites géométriques de raison complexe**Proposition 2.7 (Convergence de suites géométriques complexes [✓]) :**

soit $q \in \mathbb{C}$.

1. Si $|q| < 1$, alors $q^n \rightarrow 0$
2. Si $q = 1$, alors $q^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$
3. Si $|q| \geq 1$ et $q \neq 1$, alors q^n diverge.

Démonstration :

Il n'y a que le dernier point à montrer.

Supposons donc $|q| \geq 1$ et $q \neq 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que (q^n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. On a $q^{n+1} = q q^n$. En passant à la limite, on obtient $\ell = q\ell$ d'où $\ell = 0$ car $q \neq 1$. Or $|q^n| \geq 1$. Donc $q^n \not\rightarrow 0$. Donc faux . □

2.4 Suites récurrentes complexes

Globalement, le comportement est relativement similaires. La forme des suites complexes vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2 est cependant légèrement différente :

Proposition 2.8 (Suites complexes avec une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 [✓]) :

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique $X^2 - aX - b$ de la relation de récurrence. Alors

- Si $\Delta = 0$, dans ce cas, on note r_0 la racine complexe double et $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n$$

- Si $\Delta \neq 0$, dans ce cas, on note r_1 et r_2 les deux racines complexes et $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Démonstration :

C'est exactement la même que dans le cas réel. Il n'y a simplement pas à distinguer de cas suivant le signe de Δ (qui n'en a pas puisqu'ici c'est un complexe) $\square$

3 Suites extraites

On notera de nouveau ici $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ indifféremment.

Définition 3.1 (Suite extraite, Extraction) :

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle sous-suite de la suite u , ou suite extraite, une suite $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$. Une telle suite est notée $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et φ s'appelle une extraction.

Une sous-suite de la suite u est donc une sélection d'une infinité de termes de la suite u . La sélection est faite par l'application φ qui s'appelle une extraction.

Exemple 3.1 :

Par exemple, si u est une suite, la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est la sous-suite extraite de u composée des termes d'indices paires. Et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ la sous-suite des termes d'indices impairs.

Proposition 3.1 (Minoration d'une extraction) :

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extraction. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n.$$

Démonstration :

Tout d'abord, $\varphi(0) \geq 0$ par définition d'un extraction. Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) < n$. Alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$. Donc $\varphi(n+1) > n$. Et donc, comme ce sont des entiers, $\varphi(n+1) \geq n+1$. $\square$

Proposition 3.2 (Composition de suites extraites) :

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u d'extraction φ et $w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une sous-suite de v d'extraction ψ , alors w est une sous-suite extraite de u d'extraction $\varphi \circ \psi$.

Démonstration :

On a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ et $w_n = v_{\psi(n)}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{\varphi(\psi(n))}$. $\square$

Proposition 3.3 (Sous-suite d'une suite ayant une limite $[\sqrt{\cdot}]$) :

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente vers ℓ (avec $\ell \in \mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\ell \in \mathbb{R}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Alors toute suite extraite de u tend vers ℓ , i.e. pour toute extraction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Démonstration :

Supposons que $\ell \in \mathbb{C}$.

Soit φ une extraction. On pose v la suite extraite de la suite u par l'extraction φ . Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Alors $\forall n \geq n_0, \varphi(n) > n_0$ car φ est une extraction donc strictement croissante. Donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$, c'est à dire $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Les autres cas ($\ell = \pm\infty$) sont similaires. $\square$

Remarque :

La contraposé de ce résultat permet aussi de montrer qu'une suite ne converge pas. En effet, par

exemple, si on a $u_{\varphi(n)}$ qui tend vers ℓ et $u_{\psi(n)}$ qui tend vers $\ell' \neq \ell$, alors u n'a pas de limite.
De même, si (u_n) possède UNE sous-suite qui diverge, alors (u_n) diverge.



L'étude de la limite d'une sous-suite ne suffit pas pour déterminer la limite d'une suite. Penser à la suite $(-1)^n$ par exemple. Cependant :

Proposition 3.4 (Limite par l'étude sous-suites recouvrant la suite $[\checkmark]$) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers une même limite ℓ ($\ell \in \mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\ell \in \mathbb{R}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), alors u tend aussi vers ℓ .

Démonstration :

On ne va faire que le cas $\ell \in \mathbb{C}$. Les autres cas étant similaires.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ et $n \geq n_1 \implies |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq 2 \max(n_0, n_1) + 1$, si n est paire, on a $|u_n - \ell| = |u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$ car $p \geq n_0$. Et de même si n est impaire. $\square$

Exemple 3.2 :

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergente, alors (u_n) est convergente. Donner un contre-exemple si on enlève l'hypothèse (u_{3n}) converge.

Remarque :

On pourrait généraliser ce théorème. Ce qu'il faut, c'est avoir des sous suites de u qui permettent de recouvrir suffisamment u . Et dans ce cas, on aurait le même résultat. Par exemple, on a le même résultat si (u_{3n}) , (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) sont convergentes et de même limite.

Théorème 3.5 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) :

Toute suite numérique (réelle ou complexe) bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration (Démonstration constructiviste) :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$.

On note

$$N = \{n \in \mathbb{N}, \forall m > n, x_m < x_n\}$$

Supposons que N soit fini. Alors N admet un maximum (sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$). Soit $n_0 > \max(N)$. Par définition, $n_0 \notin N$. Donc $\exists m > n_0$ tel que $x_m \geq x_{n_0}$. On pose $n_1 = \min\{m > n_0, x_m \geq x_{n_0}\}$. Alors $x_{n_1} \geq x_{n_0}$ par définition. Et $n_1 \geq n_0$, donc $n_1 \notin N$. Alors, par définition, $\exists m > n_1, x_m \geq x_{n_1}$. On pose alors $n_2 = \min\{m > n_1, x_m \geq x_{n_1}\}$. Alors $x_{n_2} \geq x_{n_1}$. Et on construit une sous-suite de (x_n) croissante au sens large.

Supposons maintenant que N est infini. On note les indices de N par ordre croissants $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Alors, par définition, $\forall k \in \mathbb{N}, x_{n_{k+1}} < x_{n_k}$. Donc la sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Dans les deux cas, on fabrique une sous-suite monotone de (x_n) . Or (x_n) est bornée, donc $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente par théorème de la limite monotone.

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée. Alors $(\Re(z_n))$ et $(\Im(z_n))$ sont deux suites réelles bornées. Donc, par Bolzano-Weierstrass cas réel, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(\Re(z_{\varphi(n)}))$ est convergente. Alors $(\Im(z_{\varphi(n)}))$ est bornée (sous-suite d'une suite bornée). Et donc, par Bolzano-Weierstrass réel, $\exists \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extraction telle que $(\Im(z_{\varphi \circ \psi(n)}))$ est convergente. Alors $(\Re(z_{\varphi \circ \psi(n)}))$ converge toujours (sous-suite d'une suite convergente). Et donc, par caractérisation de la convergence des suites complexes par les suites parties-réelles et parties-imaginaires, $(z_{\varphi \circ \psi(n)})$ est convergente. $\square$

Démonstration (Par dichotomie) :

(x_n) est bornée réelle. On appelle m et M respectivement un minorant et un majorant de (x_n) . Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [m, M]$. On pose $a_0 = m$ et $b_0 = M$.

On construit une suite d'entier $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante de la manière suivante : on pose $n_0 = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose n_k déjà construit. On pose $Y_k = \{n \geq n_{k-1}, x_n \geq \frac{a_k + b_k}{2}\}$.

- Si Y_k est infini, on pose $n_k = \min Y_k$ et $a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$ et $b_{k+1} = b_k$.
- Si Y_k est fini, on pose $n_k = \min\{n \geq n_{k-1}, n \notin Y_k\}$ et $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$.

Alors on peut montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes telles que (a_n) croissante, (b_n) décroissantes, $|a_n - b_n| \leq \frac{M-m}{2^n}$, $m \leq a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \leq M$. On en déduit donc la convergence de la suite (a_n) , de (b_n) et donc aussi de celle de (x_{n_k}) .

Pour conclure sur les suites complexes, on reprend le même raisonnement que dans la démo précédente. $\square$

Exemple 3.3 (Suites de Cauchy $[\sqrt{\cdot}]$) :

On dit qu'une suite réelle u est de Cauchy (ou satisfait le critère de Cauchy) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
2. Réciproquement, en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer que toute suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{R}$.

Remarque :

Les suites de Cauchy jouent un rôle très importants en analyse. Ce qu'on vient de montrer ici, c'est qu'une suite réelle est de Cauchy si, et seulement si, elle est convergente. Et l'avantage du critère de Cauchy, c'est qu'il a encore un sens même pour des suites qui ne sont pas réelles. Par exemple, pour des suites de matrices. Ce qui permet de pouvoir étendre la notion de convergence à des espaces sur lesquels ça n'aurait, a priori, pas vraiment de sens.

En particulier, il y a des suites rationnelles qui sont de Cauchy mais qui ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$. Il y a un "trou" dans les rationnels au niveau de leur limite. On peut alors créer les réels en "rajoutant" les limites des suites de Cauchy rationnels.

Remarque :

Le théorème de Weierstrass est en réalité très utile. Les différents courent dans les programmes l'ont mis un peu à la marge, mais il donne naissance à des notions très intéressantes et très utiles sur les suites.

Par exemple, pour une suite bornée, il existe des suites convergentes. Mais rien ne dit qu'il y en a qu'une seule. On peut donc considérer l'ensemble des sous-suites convergentes. Et l'ensemble des limites de ces sous-suites. On peut alors étudier ces valeurs pour voir si on peut avoir tout et n'importe quoi ou au contraire, si on ne peut pas avoir n'importe quel réel comme limite potentielle d'une sous-suite.

Définition (HP) 3.2 (Valeur d'adhérence)

Soit (u_n) une suite numérique (réelle ou complexe). On appelle valeur d'adhérence de la suite (u_n) tout nombre a (réel ou complexe selon si la suite est réelle ou complexe), tel qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers a , i.e. si $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extraction tel que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Propriété (HP) 3.6 (Valeurs d'adhérence d'une suite convergente)

Si (u_n) est une suite convergente vers ℓ (éventuellement infini), alors ℓ est la seule valeur d'adhérence de (u_n) .

Remarque (HP) :

En fait, on ne peut pas avoir ce qu'on veut comme valeurs d'adhérences. L'ensemble des valeurs d'adhérences ne contient pas n'importe quoi en fonction des propriétés vérifiées par la suite.

On peut d'ailleurs caractériser les suites convergentes à partir de leur valeurs d'adhérences. Et on peut déduire beaucoup d'autres choses à partir de l'étude des valeurs d'adhérences.

4 Comparaison de suites numériques

Les suites considérées sont complexes ou réelles et définies à partir d'un certain rang. On notera $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donc les suites seront dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Attention, tout ce qui suit ne sont que des propriétés asymptotiques. Tout ce qui suit n'est valable que quand n est très grand, quand n tend vers l'infini. Il n'y a pas de véritable égalité. C'est pour ça qu'on prendra bien attention à toujours spécifier dans les symboles utilisés que les relations ne sont valides que lorsque n tend vers l'infini. Il doit TOUJOURS y avoir un " $n \rightarrow \infty$ " quelque part dans les relations.

4.1 Négligeabilité

Définition (HP) 4.1 (Suite négligeable devant une autre)

On dit qu'une suite u est négligeable devant une suite v si il existe une suite $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ telle que, pour n assez grand (i.e. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$), on a

$$u_n = v_n \varepsilon_n$$

On notera $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$ et se lie "la suite (u_n) est un petit o de (v_n) ".

Cette définition est hors programme. Elle est cependant utile car permet d'éviter d'écrire certaines âneries que la définition suivante au programme autorise.

Remarque :

Pour le moment la précision $n \rightarrow +\infty$ semble un peu superflus puisque n ne peut que tendre vers $+\infty$. Mais on va étendre cette définition (et les suivantes) plus tard aux fonctions pour qui, la relation aura un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ et même $\pm\infty$. Il sera alors indispensable de bien préciser le lieu où l'on se place. Donc autant prendre les bonnes habitudes tout de suite.

Mais la raison majeure, c'est que c'est en fait dans l'autre sens que ça passe. Les comparaisons asymptotiques sur les suites sont en réalité l'application des relations entre fonctions sur les suites. Ce sont les notations sur les fonctions que l'on reprend et applique aux suites. Et pour les fonctions, la précision est nécessaire. Mais pédagogiquement, il est plus pratique de le voir d'abord sur les suites pour s'habituer dans un premier à ces relations sans se poser la question en plus de l'endroit où se placer. Pour faire les choses par étapes. Dans un second temps, en abordant l'analyse asymptotique, on reprendra les mêmes définitions auxquelles vous serez alors plus habitué et on rajoutera le problème du lieu de validité.

Définition 4.2 (Suite négligeable devant une autre [✓]) :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors on

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cette définition est équivalente à celle hors programme dans le cadre particulier de suites jamais nulles. En effet, si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain, on a $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, v_n \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n) &\iff \exists (\varepsilon_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } u_n = \varepsilon_n v_n \\ &\iff \varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Dans la pratique, c'est cette définition que l'on utilise. C'est celle qui est utile pour montrer qu'une suite est négligeable devant une autre.

Remarque :

La notation $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ n'est pas une notation canonique. Ce qui est canonique, c'est le o et l'indication du lieu de validité de cette négligeabilité. Mais on peut trouver aussi la notation $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ couramment. Quoi qu'il en soit, tous les éléments doivent apparaître. J'ai fait le choix de mettre l'indication asymptotique sous le signe égal pour ne pas oublier que ce n'est pas inégalité et ne pas être tenté de la manipuler comme telle. Les deux notations ont leurs avantages et inconvénients.

Définition 4.3 ($u_n = v_n + o(w_n)$ [✓]) :

Soit $u, v, w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On définit alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(w_n)$ par

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(w_n) \iff u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n).$$

Remarque :

On a donc une autre façon pour dire que la suite u tend vers 0 :

$$u_n \rightarrow 0 \iff u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(1)$$

En effet, $u_n \rightarrow 0 \iff u_n/1 \rightarrow 0 \iff u_n = o(1)$. Et si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $u_n - \ell \rightarrow 0$ donc $u_n = \ell + o(1)$. On aura donc

$$u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \iff u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ell + o(1)$$

Exemple 4.1 :

Montrer que

$$\cos(1/n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 + o(1/n)$$

et

$$\sin(1/n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1/n + o(1/n)$$



Les petits o ne sont pas des égalités. Ça ne se manipule pas de la même manière. C'est une notation pour dire beaucoup plus (il existe une suite tendant vers 0 telle que ..., cf définition). C'est entre autre pour ça que mettre le $n \rightarrow \infty$ sous le signe égale est important. Pour vous rappeler que ce n'est PAS une égalité. En particulier, ce n'est pas parce qu'on a $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ que l'on a $u_n = v_n$. C'est le plus souvent faux. Par exemple, on a $\sqrt{n} = o(n)$ et $\ln n = o(n)$ mais $\sqrt{n} \neq \ln n$. Donc faire TRÈS attention en manipulant les o , O ou $\sim$ (qu'on verra un peu plus bas). Il y a des pièges qui apparaissent.

Proposition 4.1 (Règles de calculs avec le o) :

Soit $(u_n), (v_n), (\alpha_n), (\beta_n)$ quatres suites numériques de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- (i) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\lambda \alpha_n)$ alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n)$
- (ii) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n)$ alors $u_n + v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n)$
- (iii) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n)$ alors $u_n v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n \alpha_n)$.
- (iv) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\beta_n)$, alors $u_n v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n \beta_n)$.
- (v) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n)$ avec (u_n) et (α_n) deux suites réelles et $a > 0$, alors $u_n^a \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n^a)$.
- (vi) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n)$ et φ est une extraction, alors $u_{\varphi(n)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_{\varphi(n)})$.

Démonstration :

On va démontrer dans l'esprit du programme (donc pas trop proprement) et on va supposer que $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si jamais la suite v devait s'annuler, il faudrait revenir à la première définition.

- (i) On suppose $\lambda \neq 0$. On sait que $\frac{u_n}{\lambda v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui implique $\frac{u_n}{v_n} = \lambda \frac{u_n}{\lambda v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par opérations sur les suites convergentes. Si $\lambda = 0$, il faut revenir à la première définition.
- (ii) On a $\frac{u_n}{\alpha_n} \xrightarrow{0=n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{v_n}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc, par opérations sur les suites convergentes, $\frac{u_n + v_n}{\alpha_n} = \frac{u_n}{\alpha_n} + \frac{v_n}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (iii) On a $\frac{u_n v_n}{\alpha_n v_n} = \frac{u_n}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (iv) On suppose que $\alpha_n \beta_n \neq 0$ APCR. Alors facilement, $\frac{u_n v_n}{\alpha_n \beta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ d'où le résultat.
- (v) On se place dans le cas où $\alpha_n \neq 0$ APCR, alors $\frac{u_n^a}{\alpha_n^a} = \left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right)^a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par opérations sur les limites d'une suite car $a > 0$.
- (vi) La suite $\frac{u_{\varphi(n)}}{\alpha_{\varphi(n)}}$ est une sous-suite de la suite $\frac{u_n}{\alpha_n}$ qui converge vers 0.

□



$o(\alpha_n) - o(\alpha_n) \neq 0$ mais $o(\alpha_n) - o(\alpha_n) = o(\alpha_n) !!$ Il suffit d'écrire la définition pour ça. Ça devient moins bizarre en écrivant $o(\alpha_n) + o(\alpha_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n)$. D'où l'importance du symbole sous le signe égale. Les petit o vont avec $\underset{n \rightarrow \infty}{=}$. C'est une relation valable asymptotiquement.

Remarque :

Dans la pratique on exploite ces résultats sous la forme

- (i) $o(\lambda u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$
- (ii) $o(u_n) + o(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$
- (iii) $v_n o(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n v_n)$

La proposition précédente (et surtout le premier point) nous permet de nous affranchir des constantes dans les petit o . On préférera donc écrire et utiliser des $o(1)$ au lieu de $o(2)$ par exemple. Et de même, on conservera plutôt des $o(u_n)$ plutôt que des $o(2u_n)$.

Exemple 4.2 :

Montrer que

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - 2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Proposition 4.2 (Transitivité de la relation de négligeabilité [✓]) :

Soit $(u_n), (\alpha_n), (\beta_n)$ trois suites numériques (réelles ou complexes).

Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $\alpha_n = o(\beta_n)$ alors $u_n = o(\beta_n)$.

Démonstration :

On se place dans le cas (trop) simple où tous les termes sont non nuls. Alors $\frac{u_n}{\beta_n} = \frac{u_n}{\alpha_n} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par produit de suites convergentes. $\square$

Remarque :

Si $\alpha_n = o(\beta_n)$, on a alors $o(\alpha_n) = o(\beta_n)$. Attention, cela ne veut pas dire que les suites α et β sont égales. Au contraire. Il n'y a aucune raison. Mais tout ce qui est négligeable devant α le sera devant β .



Le symbole $=$ n'est PAS symétrique. En particulier, la relation $o(\alpha_n) = o(\beta_n)$ se lit UNIQUEMENT de gauche à droite et pas de droite à gauche. Donc si $u_n = o(\alpha_n)$, alors $u_n = o(\beta_n)$. Mais si $v_n = o(\beta_n)$, il n'y a pas de raison, a priori que $v_n = o(\alpha_n)$. En effet, on a $o(\sqrt{n}) = o(n)$ car $\sqrt{n} = o(n)$ mais pourtant $n \neq o(n)$.

Remarque :

La relation o est une relation antisymétrique et transitive. Mais elle n'est pas réflexive. Elle est donc presque une relation d'ordre, mais elle n'en est pas une.

Exemple 4.3 :

Montrer que

$$o(n) - no(n) = o(n^2)$$

Montrer que

$$\cos(\sin(1/n)) = 1 + o(1/n)$$

Définition 4.4 (Développement asymptotique d'une suite) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique et soit $p \in \mathbb{N}$.

On appelle *développement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'ordre p* tous développements de u_n de la forme

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{k=0}^p \alpha_k v_{k,n} + o(v_{p,n})$$

où $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ et $(v_{0,n}), \dots, (v_{p,n})$ sont des suites numériques telles que $\forall k \in \{0, \dots, p-1\}$, $v_{k+1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_{k,n})$.

Remarque :

En général, un développement asymptotique se fait selon les puissances de $1/n$ ou de n (parfois, mais plus rarement en $n \ln(n)$ ou même $n/\ln(n)$).

Exemple 4.4 :

— Un développement asymptotique de $\ln(1 + 1/n)$ à l'ordre 2 est

$$\ln(1 + 1/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2).$$

— Un développement asymptotique de e^n à l'ordre 3 est

$$e^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} + o(n^3).$$

— Un développement asymptotique de $\frac{1}{n^n}$ à l'ordre 3 est

$$\frac{1}{n^n} = e^{-n \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - n \ln(n) + \frac{1}{2} n^2 \ln(n)^2 - \frac{1}{6} n^3 \ln(n)^3 + o(n^3 \ln(n)^3)$$

4.2 Dominance

Définition (HP) 4.5 (Suite dominée)

On dit qu'une suite (u_n) est dominée par une suite (v_n) si $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$|u_n| \leq M |v_n|$$

On notera alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ et se liera " (u_n) est un grand O de (v_n) ".

La définition qui est au programme est la suivante (elle est donc équivalente à la vraie définition dans le cas où les suites ne sont jamais nulles APCR) :

Définition 4.6 (Suite dominée par une autre (O) [$\checkmark$]) :

Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n) \iff (u_n/v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

On peut écrire ça aussi sous la forme intermédiaire :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n) \iff \exists (M_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ bornée telle que } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = M_n v_n$$

qui est un peu mieux puisqu'on a pas besoin de supposer que (v_n) est à terme non nuls.

Dans la pratique, la définition 4.5 est bien plus pratique. C'est plus facile d'utilisation et c'est en ces termes qu'il faut y penser.

Démonstration :

$\Leftarrow$ Comme la suite (u_n/v_n) est bornée, on note A un majorant de $(|u_n/v_n|)$ et dans ce cas $|u_n| \leq A|v_n|$ dès que n est assez grand.

$\Rightarrow$ Soit $A \geq 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq A|v_n|$. Alors $|u_n/v_n| \leq A$. Et voilà. $\square$

Remarque :

La notation " $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(1)$ " signifie que la suite (u_n) est bornée. On pourra donc le noter comme ça en raccourcis.

Proposition 4.3 (Lien o et O) :

Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n) \implies u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$$

Démonstration :

Avec l'hypothèse supplémentaire $v_n \neq 0$, ça devient trop facile. $\square$

Remarque :

Comme dans le cas des o , la relation $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(v_n)$ ne permet pas de dire que $u_n = w_n$. Les remarques relatives au o sont également valables ici.

Exemple 4.5 :

Montrer

$$\sin(n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(1)$$

et

$$\cos(1/n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 + O(1/n)$$

Proposition 4.4 (Règles de calculs avec O) :Soit $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(\lambda v_n)$ alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$
2. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ et $w_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$, alors $u_n + w_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$.
3. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ alors $u_n w_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n w_n)$.
4. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ et si φ est une extraction, alors $u_{\varphi(n)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_{\varphi(n)})$.

Démonstration :

1. Soit $M \geq 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|\lambda v_n|$. Alors, $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq (M|\lambda|)|v_n|$ donc $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$.
2. Soit $A, B \geq 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq A|v_n|$ et $|w_n| \leq B|v_n|$ (on prend n_0 le max des deux rangs, comme d'hab). Alors $|u_n + w_n| \leq |u_n| + |w_n| \leq (A + B)|v_n|$ pour tout $n \geq n_0$ d'où $u_n + w_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$.
3. Soit $M \geq 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|v_n|$. Alors $|u_n w_n| \leq M|w_n v_n|$ d'où $u_n w_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n w_n)$.
4. On suppose que $v_n \neq 0$ APCR. Alors $\frac{u_{\varphi(n)}}{v_{\varphi(n)}}$ est une sous-suite de la suite $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée. Elle est donc bornée et la démonstration est terminée.

□

Remarque :

Dans la pratique, on exploite ces résultats sous la forme

- (i) $O(\lambda v_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$
- (ii) $O(v_n) + O(v_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$

$$(iii) \quad w_n O(v_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n w_n)$$

ATTENTION ! Ici encore, les relations ne sont pas symétriques et ne se lisent que de gauche à droite. il faut suivre la flèche pour la lecture.

Proposition 4.5 (Compositions de o et O) :

Soit $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n)$ alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$
2. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$
3. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n)$ alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n)$

Démonstration :

Laisser en exercice. Bon exercice. □

Exemple 4.6 :

En étudiant $f : x \mapsto \ln(1+x) - x + x^2/2 - x^3/3$ et $g : x \mapsto \ln(1+x) - x + x^2/2 - x^3/3 + x^4$, montrer que

$$\ln(1 + 1/n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$$

et en déduire

$$\ln(1 + 1/n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n} + O(1/n^2)$$

mais que la réciproque est fausse (trouver un contre-exemple)



Attention ! Dans les o , le dernier terme possible doit avoir la même “taille” que le terme dans le o . Alors que dans le O , on s'arrête un cran avant !

4.3 Croissances comparées des suites de références

Proposition 4.6 (Croissances comparées de suites de même type [✓]) :

Pour les suites de même types, on a :

1. Pour $\alpha < \beta$, on a

$$n^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(n^\beta) \quad \text{et} \quad (\ln n)^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{=} o((\ln n)^\beta)$$

2. Pour $|a| < |b|$, on a

$$a^n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(b^n)$$

Démonstration :

Exercice. □

Proposition 4.7 (Croissance comparée de suites de limites infini [✓]) :

Pour $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$, on a

$$(\ln n)^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(n^\beta), \quad n^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(a^n), \quad a^n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(n!)$$

Démonstration :

Montrons que $(\ln n)^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(n^\beta)$

On a facilement $n^\beta \neq 0$ pour tout n . Alors

$$\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = e^{\alpha \ln(\ln n) - \beta \ln n} = e^{\ln n \left(\alpha \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} - \beta \right)}$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = 0$, on en déduit $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} - \beta \right) = -\beta$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$ et donc $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$.

Montrons que $n^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(a^n)$.

On a

$$\frac{n^\alpha}{a^n} = e^{\alpha \ln n - n \ln a} = e^{n \left(\alpha \frac{\ln n}{n} - \ln a \right)}$$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \frac{\ln n}{n} - \ln a \right) = -\ln a$ donc $\frac{n^\alpha}{a^n} \rightarrow 0$ puisque $a > 1$.

Montrons enfin que $a^n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(n!)$

On pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$. Mais a étant fixe, on aura $n+1 > a$ à partir d'un certain rang (en fait, dès que $n > [a]$). Alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et minorée par

0. Donc (u_n) converge vers un réel ℓ . Alors, en passant la relation $u_{n+1} = \frac{a}{n+1}u_n$ à la limite, on obtient $\ell = 0 \times \ell$, donc $\ell = 0$. $\square$

En résumé, si on note $\ll$ la relation de négligeabilité (i.e. $(u_n) \ll v_n \iff u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$), on a

$$\ln(n)^\beta \underset{\alpha > 0}{\ll} n^\alpha \underset{a > 1}{\ll} a^n \ll n! \ll n^n$$

On pourrait bien sûr en intercaler par mal au milieu. La liste n'est absolument pas exhaustive. Mais c'est un bon point de départ.



Attention ! La notation $\ll$ pour la notion de négligeabilité n'est absolument pas canonique. C'est une notation entre nous. Il n'existe aucune notation pour parler de cette relation d'ordre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (exercice : montrer que cette relation est une relation d'ordre. Est-elle totale ?)

Lemme 4.8 (Passage à l'inverse dans les o) :

Si (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, alors

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n) \implies \frac{1}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n) &\implies \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0 \\ &\iff \frac{1/v_n}{1/u_n} \rightarrow 0 \\ &\iff \frac{1}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 4.9 (Croissance comparée de suites de limite nulle [✓]) :

Soit $\alpha, \beta > 0$ et $0 < a < 1$. Alors

$$\frac{1}{n!} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(a^n), \quad a^n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \frac{1}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{(\ln(n))^\beta}\right)$$

Démonstration :

Cette proposition découle directement de la proposition 4.7 sur laquelle on applique le lemme 4.8 précédent. $\square$

Exemple 4.7 :

Placer les uns par aux autres, en termes de négligeabilité, les termes e^{-n} , 2^n , $1/n^2$, $\frac{1}{3^n}$, $1/n$, $\frac{1}{(\ln n)^2}$, $\frac{1}{\ln n}$, $\frac{1}{n \ln n}$, 1 , $\frac{\ln n}{n^2}$, $\ln n$, $\frac{n}{\ln n}$, $\ln n$, $\ln \ln n$, n , $\sqrt{n} \ln n$, n^2 , $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, e^n , $n!$.

4.4 Équivalence**Définition (HP) 4.7 (Suites équivalentes)**

Une suite (u_n) est dite équivalente à une suite (v_n) si $\exists(\theta_n)$ telle que $\theta_n \rightarrow 1$ et si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$u_n = \theta_n v_n$$

On note alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ et on lit “ (u_n) est équivalente à (v_n) quand n tend vers l’infini”.

Là encore, la précision du $n \rightarrow +\infty$ mais elle est nécessaire. Cela prendra tous son sens dans l’analyse asymptotique.

Là aussi, cette définition n’est pas au programme. Celle qui va nous intéresser sera la suivante, valable uniquement dans le cas de suites jamais nulles à partir d’un certain rang.

Définition 4.8 (Suites équivalentes [✓]) :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques avec (v_n) ne s’annulant pas à partir d’un certain rang.

Alors on dit que (u_n) est équivalente à (v_n) , et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, la relation :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1$$

Pour prouver que les deux définitions se correspondent (*i.e.* qu'elles sont équivalentes dans le cas de suites jamais nulles APCR), il suffit de refaire comme les o et O .

Remarque :

Bien sûr, comme avant, cette définition a la limitation qu'elle ne peut s'appliquer que pour des suites non nulles. Alors que la vraie définition est toujours valable.

Exemple 4.8 :

On a

$$\begin{aligned} n + \ln n + 2 &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \\ \sqrt{n^2 + n + 1} &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} \\ \frac{n+1}{n} &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1 \end{aligned}$$



La relation $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 0$ signifie que la suite u_n est nulle à partir d'un certain rang, *i.e.* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n = 0$. Ce cas est assez rare (car peu intéressant ...). On ne peut le voir avec la définition au programme et il est nécessaire de reprendre la vraie définition pour le voir (c'est très facile, il suffit de l'écrire).



L'écriture " $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} +\infty$ " n'a AUCUN sens. Ca ne veut absolument RIEN dire. Ce n'est pas possible. Pour vous en convaincre, essayer d'écrire la définition de deux suites équivalentes dans ce cadre. Vous verrez que ça n'a pas de sens.

Proposition 4.10 ($\sim$ est une relation d'équivalence) :

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence (tiens donc ...)

Autrement dit, on a Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites numériques.

1. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n$.
2. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n$.

Démonstration :

C'est pas dur. A écrire. □

Proposition 4.11 (Caractérisation de $\sim$ par o [✓]) :

Soi $(u_n), (v_n)$ deux suites numériques. Alors on a :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} v_n + o(v_n)$$

Ce résultat est essentiel. En fait, le but du jeu sera de déterminer un équivalent à une suite donné (afin d'en déduire une limite). Mais la manipulation des équivalents est un peu délicate. Les o sont plus faciles à manipuler, moins fragiles. Donc il faudra simplement écrire $u_n = v_n + o(v_n)$ pour en déduire un équivalent à la suite (u_n) .

Démonstration :

On va supposer, pour simplifier les choses, que (u_n) et (v_n) ne sont jamais nulles. On a donc

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n &\iff \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \\ &\iff \frac{u_n}{v_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1) \\ &\iff u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \end{aligned}$$

□



On ne peut PAS sommer avec des équivalents. $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ n'entraîne pas $u_n + w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n + w_n$. En effet, il suffit de considérer $n+1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n-1$. Par contre $(n+1)-n \not\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (n-1)-n$.

Remarque :

Ce résultat est essentiel pour obtenir un équivalent à une somme. On rappelle qu'on ne peut **PAS** sommer les équivalents.

Exemple 4.9 :

Donner des équivalents des suites $2^n + n! + n^{10}$, $\ln n + 2\sqrt{n} + 1$ et $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\ln n}$.

Proposition 4.12 (Équivalent d'une suite convergente vers $\ell \neq 0$ [✓]) :

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$ avec $\ell \neq 0$. Alors

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \iff u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ell$$

Démonstration :

Si $u_n \rightarrow \ell \neq 0$, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ell + o(1) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ell + o(\ell)$ donc $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ell$.

Réciproquement, si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ell \neq 0$, alors $u_n/\ell \rightarrow 1$ donc $u_n \rightarrow \ell$ par opération sur les limites. $\square$



Ce résultat est FAUX si $\ell = 0$ ou si $u_n \rightarrow \pm\infty$.



Pour que u_n puisse être équivalent à ℓ , il faut pouvoir se cacher derrière. Sans arbre, on voit l'âne. Si la limite est nulle, on ne peut pas se cacher derrière et on ne peut "arrondir" la suite à sa limite en l'infini. Puisqu'il n'y rien d'autre que la suite.

L'intérêt majeure des équivalence vient du résultat suivant :

Proposition 4.13 (Équivalence et limite [✓]) :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$. Si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{K} \cup \{\pm\infty\}$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

Démonstration :

On suppose encore que (u_n) et (v_n) ne sont jamais nulles. Alors $u_n = \frac{u_n}{v_n} v_n$ et par opérations sur les suites convergentes, on a le résultat. $\square$

Donc pour trouver la limite d'une suite, il suffit de trouver une autre suite équivalente à la première dont on connaît la limite. Et c'est valable pour une limite finie OU infinie. Donc par exemple, pour montrer qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$, il suffit de montrer que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ avec $v_n \rightarrow +\infty$.

Exemple 4.10 :

Étudier le comportement asymptotique de la suite $n^2 - n - \sqrt{n}$.

Les équivalents permettent donc de lever des indéterminations de manières efficaces.

Remarque :

Si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell$, il faut avoir $\ell \in \mathbb{K}^*$ pour pouvoir dire $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$. Mais si $\ell = 0$, on ne peut rien dire. En effet, le fait de savoir que $u_n \rightarrow 0$ ne nous donne pas pour autant $u_n \sim 0$. Je rappelle que cette dernière relation nous dit que u_n est nulle à partir d'un certain rang. Alors que u_n peut très bien ne jamais s'annuler et toujours avoir $u_n \rightarrow 0$.



Le fait d'avoir $u_n \rightarrow 0$ et $v_n \rightarrow 0$ n'implique PAS $u_n \sim v_n$. Par exemple, prendre $u_n = 1/n$ et $v_n = 1/n^2$.

On a le même problème en $\pm\infty$. Si on a $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow \infty$, ça n'implique pas $u_n \sim v_n$. Prendre comme contre-exemple $u_n = n$ et $v_n = n^2$.

Proposition 4.14 (Équivalence et signe [✓]) :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) de $\mathbb{R}^N$.

Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$, alors u_n et v_n ont le même signe à partir d'un certain rang.

Remarque :

Il est nécessaire d'avoir des suites réelles pour pouvoir parler de signes. Ce résultat n'a de sens QUE pour des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$

Démonstration :

Là encore, on se place dans le cas où les deux suites ne sont jamais nulles. Alors $u_n/v_n \rightarrow 1$. Donc $u_n/v_n > 0$ à partir d'un certain rang. Et d'où le résultat. $\square$

Exemple 4.11 :

Montrer que $-\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n^2}$ est positif si n est assez grand.

Proposition 4.15 (Lien $\sim$ et O) :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(u_n)$

Démonstration :

On suppose que les deux suites ne sont jamais nulles. Alors $u_n/v_n \rightarrow 1$ donc $(u_n/v_n)_n$ et son inverse sont deux suites convergentes, donc bornées. $\square$

Remarque :

Ce n'est PAS une équivalence. On a par exemple $n = O(2n)$ et $2n = O(n)$ mais $2n \not\sim n$.

Proposition 4.16 (Lien $\sim$, O et o) :

Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n) \end{array} \right\} \implies u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$$

2.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n) \end{array} \right\} \implies u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n)$$

3.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n) \\ v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n \end{array} \right\} \implies u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$$

4.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n) \\ v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n \end{array} \right\} \implies u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n)$$

Démonstration :

Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$. Si en plus $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$, on a, par l'une des propriété précédente, $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$.

Les autres points ce démontrent de la même manière. $\square$

À cause de ces propriétés, on écrira des relations avec les o et O les plus simples possibles. Par

exemple, on écrira $o(n)$ au lieu d' $o(n+1)$ car $n+1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$.



On ne peut PAS sommer avec des équivalents. $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ n'entraîne pas $u_n + w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n + w_n$. En effet, il suffit de considérer $n+1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n-1$. Par contre $(n+1)-n \underset{n \rightarrow \infty}{\not\sim} (n-1)-n$.



On ne peut pas non plus composer les équivalences pas des fonctions. Ça marche dans certains cas, mais en général, ça ne fonctionne pas. Par exemple, $(-1)^n \underset{n \rightarrow \infty}{\not\sim} 1$ très clairement et pourtant $((-1)^n)^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1^2$. Et ça fonctionne aussi mal dans l'autre sens : on a $1-1/n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1+1/n$ et pour tant, si on prend $f(x) = \frac{1}{x-1}$, alors $f(1-1/n) \underset{n \rightarrow \infty}{\not\sim} f(1+1/n)$.

Proposition 4.17 (Équivalence et multiplications) :

Soit $(u_n), (v_n), (w_n), (z_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} z_n$ alors $u_n w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n z_n$ et $\frac{u_n}{w_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{v_n}{z_n}$ si $w_n \neq 0$ APCR.
2. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ alors $\forall p \in \mathbb{Z}$, $u_n^p \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n^p$ si $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ APCR.

On notera que cette proposition est valable également si les suites sont à valeurs complexes (cas rare). On rappelle qu'on ne PEUT PAS élever de complexes à une puissance autre chose qu'entière. Donc cette proposition fonctionne dans les complexes mais la proposition suivante ne fonctionne pas pour les complexes. Elle ne fonctionne QUE avec des réels. Puisqu'il faut que la suite soit strictement positive.

Démonstration :

On suppose toutes les suites jamais nulles pour simplifier les choses. Alors $\frac{u_n w_n}{v_n z_n} = \frac{u_n}{v_n} \frac{w_n}{z_n}$ et $\frac{u_n/w_n}{v_n/z_n} = \frac{u_n}{v_n} \frac{z_n}{w_n}$ et ces suites convergent vers 1 par opérations sur les suites. On procède de la même manière pour le second point (facile). $\square$

Exemple 4.12 :

Déterminer un équivalent simple de

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) (n + \ln n)^2$$

et de

$$v_n = \frac{1 + \ln n}{n + \sqrt{n}}$$

Théorème 4.18 (Équivalence et puissance) :

Soit $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$, alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n^\alpha$$

Mais ATTENTION ! Ce théorème ne fonctionne QUE avec des suites réelles à termes strictement positifs. D'abord, si l'on a des suites complexes, on ne peut pas les élever à une puissance réelle, donc ça n'a pas de sens pour les suites complexes. Ensuite, pour des réels négatifs, on ne peut pas non plus les élever à des puissances rationnels (on ne peut élever -1 à la puissance 1/2 par exemple). Donc il faut des réels strictement positifs.

Démonstration :

La démonstration se fait comme dans la proposition précédente. □

Exemple 4.13 :

Déterminer un équivalent simple de

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 1}}$$

Attention, il faut un exposant fixe. On ne peut pas avoir un exposant dépendant de n . Par exemple si $u_n \sim v_n$, on a pas $u_n^n \sim v_n^n$.

D'une

Proposition 4.19 (Premier développement asymptotique) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a . Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Alors

$$f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} f(a) + f'(a)(u_n - a) + o(u_n - a).$$

Démonstration :

Par définition de la dérivabilité de f en a , on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a).$$

Or $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. Donc, par caractérisation séquentielle des limites,

$$\frac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(a).$$

Puis, par caractérisation des suites convergentes par les o , et par manipulation des o , on a le résultat. $\square$

Remarque :

On s'attend à refaire la démo (qui prend une ligne) à chaque fois.

On en déduit aussi en particulier des équivalences : si $f(0) = 0$, $f(1/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f'(0)}{n}$.

Exemple 4.14 :

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 1 de $\arcsin(1/2 + 1/n)$.

Remarque :

Le résultat précédent sur le premier développements asymptotique sera généralisé et largement amélioré dans le chapitre sur les développements limités.

Proposition 4.20 (Premiers équivalents de référence) :

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors

- $\sin u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$
- $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$
- $e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$
- $\cos(u_n) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$

Démonstration (HP) :

Si la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang, alors la relation est vraie puisque $\sin(0) = 0$. Supposons donc que (u_n) ne soit pas nulle à partir d'un certain rang, c'est à dire que $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq n_0$ tel que $u_n \neq 0$. On considère l'extraction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\varphi(0) = \min\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n), u_k \neq 0\}$. Tout d'abord, les ensembles considérés sont des sous-ensembles de $\mathbb{N}$, donc possèdent un minimum. Et le minimum est unique donc $\varphi(n)$ est bien déterminé. Il reste juste à montrer que cette application est bien strictement croissante. Et par définition, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ est un minorant de $\{k > \varphi(n), u_k \neq 0\}$. Mais $\varphi(n)$ n'appartient pas à cet ensemble. Comme le minimum y appartient par définition du minimum, on a donc $\varphi(n) < \varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n), u_k \neq 0\}$. Donc φ est bien une extraction.

On notera que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $n = \varphi(m)$. φ est donc l'extraction qui sélectionne tous les termes non nuls de la suite (u_n) .

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \neq 0$ et toujours $u_{\varphi(n)} \rightarrow 0$. On en déduit $\frac{\sin(u_{\varphi(n)})}{u_{\varphi(n)}} \rightarrow 1$. On définit alors la suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \kappa_n = \begin{cases} \frac{\sin(u_n)}{u_n} & \text{si } \exists m \in \mathbb{N}, n = \varphi(m) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(κ_n) est donc parfaitement définie, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = 0$, ou soit $u_n \neq 0$ (et donc $n = \varphi(m)$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$). Autrement dit, on a une partition de $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n = \varphi(m)\} \cup \{n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \neq \varphi(m)\} = \varphi(\mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \setminus \varphi(\mathbb{N}))$.

On a pour tout $n \in \varphi(\mathbb{N})$, $\sin u_n = \kappa_n u_n$. Et si $n \notin \varphi(\mathbb{N})$, alors $u_n = 0$, donc $\kappa_n = 1$ et $\sin u_n = 0$. On a donc aussi $\sin u_n = \kappa_n u_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin u_n = \kappa_n u_n$. Et $\kappa_n \rightarrow 1$. On en déduit $\sin u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n$.

On effectue le même genre de raisonnement pour montrer les deux autres points. □

Une autre démo beaucoup (beaucoup) plus simple pourra être faite une fois qu'on aura vu la notion de développement limité.

Exemple 4.15 :

Déterminer un équivalent simple de

$$u_n = \tan(1/n) - \frac{1}{n^2}$$

Théorème 4.21 (Équivalent et composition par $\ln$ [✓]) :

Soit $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ et $v_n \rightarrow \ell \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$, alors $\ln u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln v_n$.

Démonstration :

On suppose d'abord $\ell \neq 0$ et $\ell \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Alors $\ln(u_n) - \ln(v_n) \rightarrow 0$ en exploitant l'équivalence entre les deux suites. Alors, par opérations sur les suites convergentes, $\frac{\ln(u_n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)}$ converge vers 0. Ce qui donne le résultat.

Si $\ell = 0$, alors $\frac{1}{\ln(v_n)} \rightarrow 0$ et les opérations sur les suites convergentes fonctionnent encore.

Si $\ell = +\infty$, alors $\frac{1}{\ln(v_n)} \rightarrow 0$ et de même. $\square$

Exemple 4.16 :

Déterminer un équivalent simple de la suite

$$u_n = \ln(\sin(1/n))$$

Exemple 4.17 :

Déterminer un développement asymptotique de 2 termes de

$$u_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n-1)}$$

Exemple 4.18 (À CONNAÎTRE [✓]) :

Déterminer la limite de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. (on rappelle qu'on a déjà montré que cette suite est convergente)



Attention, si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ et $v_n \rightarrow 1$, on ne peut pas en déduire $\ln u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln v_n$. Le problème est le même qu'avec la limite 0 et les équivalents. Prendre $u_n = 1 + 1/n$ et $v_n = 1 - 1/n$ comme contre-exemple.

Remarque :

Si $u_n \rightarrow 1$, pour déterminer un équivalent (un peu plus précis que 1) simple de u_n , il suffit de considérer $v_n = u_n - 1$. On en déduit alors $\ln(u_n) = \ln(1 + v_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$. Attention quand même à ce que v_n soit bien à termes positifs.

Exemple 4.19 :

Déterminer un équivalent simple de $\ln(\cos(1/n))$.



On ne peut PAS passer les équivalent à l'exponentielle. Par exemple, on a $u_n = n + 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n = n$, mais e^{n+1} n'est pas équivalent à e^n .

On montrera dans un exercice le résultat suivant qu'il est utile d'avoir en tête, donc autant le mettre dans le cours :

Théorème 4.22 (Équivalent de Stirling) :

On a l'équivalent :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

La démonstration de l'équivalent de Stirling est un peu longue en utilisant seulement des outils dans le cadre du programme. Mais ça pourrait faire l'objet d'un DM ou d'un DS

Exemple 4.20 :

Étudier le comportement asymptotique de

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

Remarque (Équivalent à partir de limite d'une suite) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ et $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ convergente vers a . Si f est dérivable en a , alors

$$f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} f(a) + (u_n - a)f'(a) + o(u_n - a)$$

En effet, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} f'(a)$$

En particulier,

$$\frac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} f'(a)$$

Et donc, par définition des notations o , on a

$$\frac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} f'(a) + o(1) \iff f(u_n) - f(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} f'(a)(u_n - a) + o(u_n - a)$$

Ce raisonnement peut être généralisé à beaucoup d'autres situations. Dès qu'on a une limite, on peut l'écrire à l'aide de o .

Exemple 4.21 :

Montrer que

$$\int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

5 Cas des suites implicites

Une suite implicite est une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie implicitement comme les solutions d'une suites de fonctions, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x_n) = 0$ où f_n est une fonction continue.

L'étude de la suite (x_n) dépend alors des propriétés de la suite de fonctions (f_n) . En particulier :

- On commence par justifier de l'existence de la suite (x_n) (en général en utilisant le TVI et/ou le théorème de la bijection) ;

- On se place sur un intervalle où toutes les fonctions f_n sont strictement monotone et qui contient les termes de la suite (x_n) .
- On étudie le signe de $f_{n+1}(x_n)$ (ou $f_n(x_{n+1})$).
- On en déduit la stricte monotonie de (x_n) grâce à la stricte monotonie de f_n .
- On revient aux théorèmes classiques des suites (si (x_n) est croissante et majorée, on peut en déduire la convergence).
- On utilise la convergence éventuelle et l'expression de f_n pour établir un développement asymptotique de la suite (x_n) .

Exemple 5.1 :

Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{x_n} = x_n + n$ et $x_n \geq 0$.