



Interrogation 5

Équations Différentielles

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et d'être solution de cette équation.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I . Et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de cette équation différentielle si f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$.

2. Solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et l'équation différentielle linéaire homogène $y' + a(x)y = 0$. Soit $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a . Alors l'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

3. Principe de superposition dans le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Soit $a, b_1, b_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Soit $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b_1(x)$ et $f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de $y' + a(x)y = b_2(x)$. Alors $f_1 + f_2$ est solution de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

4. Solutions de $y'' + ay' + by = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\Delta = a^2 - 4b$ et l'équation différentielle linéaire $y'' + ay' + by = 0$ homogène d'ordre 2 à coefficients constants réels. Alors :

- Si $\Delta > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les solutions de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, alors l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$ et α est la solution réelle de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, alors l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{\alpha x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

- Si $\Delta < 0$ et $\alpha \pm i\omega$ sont les deux solutions non réelles conjuguées de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, alors l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)) e^{\alpha x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Exercice 2 :

Résoudre l'équation différentielle $y' - 2xy = e^{x+x^2}$.

L'équation $(E) : y' - 2xy = e^{x+x^2}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $\mathbb{R}$. Une primitive de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto x^2$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{x^2}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $f : x \mapsto h(x)e^{x^2}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions dérivables. Et :

f solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2xf(x) = e^{x+x^2}$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, h'(x)e^{x^2} + 2xh(x)e^{x^2} - 2xh(x)e^{x^2} = e^{x+x^2}$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x$$

On choisit alors $h : x \mapsto e^x$. Et donc $f : x \mapsto e^{x+x^2}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (\lambda + e^x)e^{x^2}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$