



Interrogation 6

Relations d'Ordre

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'une relation d'ordre.

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ ($\mathcal{R}$ est réflexive); $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \implies x = y)$ ($\mathcal{R}$ est antisymétrique); et $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z)$ ($\mathcal{R}$ est transitive). On dit enfin que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale, si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre et $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$.

2. Définition d'un majorant.

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Soit $A \subset E$ et $M \in E$. M est un majorant de A si $\forall a \in A, a\mathcal{R}M$.

3. Définition de la borne inf.

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble totalement ordonné. Soit $A \subset E$ et $m \in E$. On dit que m est la borne inf de A , noté $\inf A$, si $\forall a \in A, m\mathcal{R}a$ (m est un minorant de A) et $\forall x \in E, (x \text{ minorant de } A \implies x\mathcal{R}m)$.

4. Définition de la partie entière.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x , noté $\lfloor x \rfloor$, est définie par $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$.

5. Propriété de la borne inf de $\mathbb{R}$.

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inf.

6. Propriétés de la partie entière.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ (la partie entière est croissante). $x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$. Et enfin : $\forall k \in \mathbb{Z}, \lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

7. Définition de la densité dans $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. A est dite dense dans $\mathbb{R}$ si $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b,]a, b[\cap A \neq \emptyset$. Autrement dit, si $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \implies \exists x \in A, a < x < b$.

8. Caractérisation de la borne sup dans $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \alpha \text{ majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide admettant un minimum. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante. Montrer que $\max f(A)$ existe et que $\max f(A) = f(\min A)$.

Par définition du minimum (qui est un minorant), $\forall a \in A, \min A \leq a$. Or f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, $\forall a \in A, f(\min A) \geq f(a)$. Donc par définition, $f(A)$ est majoré par $f(\min A)$.

De plus, $\min A \in A$ par définition du minimum. Donc $f(\min A) \in f(A)$.

Donc $f(\min A)$ est un majorant de $f(A)$ dans $f(A)$. Donc, par définition du maximum, $f(\min A)$ est un maximum de $f(A)$. Et par unicité du maximum (car $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné), $f(\min A)$ est le maximum de $f(A)$.