DM 3
Équations Différentielles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 05 Novembre 2025

Partie I

On considère l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = e^x \tag{E}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) en détaillant bien toutes les démarches entreprises.
2. Déterminer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Partie II

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant la propriété (P) suivante :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x). \tag{P}$$

3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant la propriété (P).
   (a) Montrer que f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle
   $$x^2y'' - xy' + y = q(x)$$
   où q est une fonction à déterminer.
   (c) Soit la fonction g définie par $g(t) = f(e^t)$. Montrer que g est solution de l'équation (E).
   (d) En déduire que
   $$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ f(x) = \left(\frac{\ln(x)^2}{2} + \lambda\right)x.$$
4. Conclure.