DM 3
Équations Différentielles
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 05 Novembre 2025

1. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels et à second membre continue et défini sur $\mathbb{R}$. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$. Donc les solutions de l'équation homogène sont
$$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
Il reste juste à déterminer une solution particulière de (E). On va cherche une solution particulière y_1 de (E) sous la forme $y_1(x) = Ax^2e^x$. Cette fonction est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. Et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ y_1'(x) = A(2x + x^2)e^x \qquad \text{et} \qquad y_1''(x) = A(2 + 4x + x^2)e^x.$$
On en déduit donc que
$$y_1 \text{solution de } (E) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \ 2Ae^x = e^x \iff A = \frac{1}{2}.$$
Donc $y_1 : x \mapsto \frac{x^2}{2}e^x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
On en déduit donc que les solutions de (E) sont les fonctions
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)e^x \end{array}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. La solution du problème de Cauchy est donc la solution y de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Mais si y est solution de (E), alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)e^x$. Donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ y'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + (\lambda+1)x + \lambda + \mu\right)e^x.$$
On en déduit donc que $y(0) = \mu$ et $y'(0) = \lambda + \mu$. On a donc le système
$$\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$
Donc la solution du problème de Cauchy est donc la fonction
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^x \end{array}$$

3. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dérivable vérifiant la propriété (P) de l'énoncé, *i.e.*

$$\forall x > 0,\ f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x).$$

(a) f étant dérivable, le produit $x \mapsto xf(x)$ est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont. Et $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f' est la somme de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle est dérivable. Donc f est deux fois dérivable.

(b) En dérivant f', on a

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ f''(x) &= f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}f(x) + \frac{1}{x}\ln(x) + \frac{1}{x}\end{aligned}$$

On en déduit donc facilement

$$\forall x > 0,\ x^2 f''(x) - xf'(x) + f(x) = x.$$

Et donc f est solution de l'équation différentielle

$$x^2y'' - xy' + y = q(x) \qquad (L)$$

avec

$$q(x) = x.$$

(c) Comme l'image de la fonction exponentielle est $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $g : t \mapsto f(e^t)$ est donc définie sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la fonction exponentielle est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, donc, par composition, la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Et en dérivant, on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = e^t f'(e^t) \qquad \text{et} \qquad g''(t) = \Big(e^t f''(e^t) + f'(e^t)\Big)\, e^t.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) - 2g'(t) + g(t) &= \Big(e^t f''(e^t) + f'(e^t) - 2f'(e^t)\Big)\, e^t + f(e^t)\\ &= e^{2t} f''(e^t) - e^t f'(e^t) + f(e^t)\\ &= e^t. && \text{car } e^t > 0 \text{ et cf } 3b\end{aligned}$$

Donc g est solution de (E), par définition.

(d) On déduit de la question précédente et de la première partie :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(e^t) = g(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \lambda t + \mu\right) e^t.$$

Et par bijectivité de la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ f(x) = \left(\frac{\ln(x)^2}{2} + \lambda \ln(x) + \mu\right) x.$$

Mais comme f doit vérifier la propriété (P), on doit avoir en particulier $f'(1) = f(1)$. Or $f(1) = \mu$ et

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\ln(x)^2}{2} + (\lambda + 1)\ln(x) + \lambda + \mu.$$

Donc $f'(1) = \lambda + \mu$. On en déduit donc $\lambda = 0$ et donc aussi que, si f vérifie la propriété (P), alors

$$\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ f(x) = \left(\frac{\ln(x)^2}{2} + \mu\right) x.$$

4. On vient de voir que si f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et deux fois dérivables et vérifiant la propriété (P), alors $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0,\ f(x) = \left(\frac{\ln(x)^2}{2} + \mu\right) x$.

   Réciproquement, on considère une fonction $f(x) = \left(\frac{\ln(x)^2}{2} + \mu\right) x$ pour tout $x > 0$ et où $\mu \in \mathbb{R}$. Alors f est le produit de deux fonctions dérivables. Elle est donc elle même dérivable. Et

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\ln(x)^2}{2} + \mu + \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) x = \frac{\ln(x)^2}{2} + \mu.$$

   Et on a également

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ xf\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) &= x\left(\frac{\ln(1/x)^2}{2} + \mu\right)\frac{1}{x} + \ln(x) \\
&= \frac{\ln(x)^2}{2} + \mu + \ln(x) \\
&= \frac{\ln(x)^2}{2} + \ln(x) + \mu \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

   Donc f vérifie bien la propriété (P).

   On vient donc de montrer que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall x > 0,\ f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x)$ si, et seulement si, $\exists \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0,\ f(x) = \left(\frac{\ln(x)^2}{2} + \mu\right) x$. On a donc trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant la propriété (P).