



DS 3

Équations Différentielles - Relations d'Ordres - Fonctions Usuelles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 05 Novembre 2025

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Équations différentielles) :

Le but de ce problème est d'étudier deux équations différentielles d'ordre 2 à coefficients non constants. On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0. \quad (E)$$

1. On considère l'équation différentielle

$$y' + xy = 0. \quad (F)$$

Résoudre l'équation différentielle (F).

2. Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On pose $z : x \mapsto y'(x) + xy(x)$. Montrer que si z est solution de (F), alors y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
 3. Soit y une solution de (E). On pose $z : x \mapsto y'(x) + xy(x)$. Montrer que z est solution de (F).
 4. Résoudre alors (E).
-

Problème 2 (Fonctions usuelles) :

Partie 1

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}}.$$

1. Étude de f .

- (a) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $I = [0, \pi]$.
- (b) Étudier le signe de $f(x) - \sin(x)$ sur l'intervalle I .
- (c) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur I .
Indic. : on rappelle que $\forall x \in]0, \pi]$, $\sin(x) < x$.
- (d) Étudier les variations de f sur I et tracer l'allure du graphe de f sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction g définie sur I par

$$g(x) = \arccos\left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right).$$

2. Étude de g .

- (a) Étudier les variations de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{4-5t}{5-4t} \end{array}$$

- (b) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'on peut restreindre son étude à I .
- (c) Montrer que g est dérivable sur $]0, \pi[$ et calculer sa dérivée. Déterminer l'image de g et tracer l'allure du graphe de g .

3. Soit $x \in [0, \pi/3]$.

- (a) Calculer $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.
- (b) Calculer $f(g(x))$. Déterminer aussi $g([0, \pi/3])$. Que peut-on en conclure ?

Partie 2

On pose

$$h(x) = \arcsin\left(\frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right).$$

- 4. Montrer que h est définie sur $\mathbb{R}$ et que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$.
- 5. Soit $x \in [0, \pi]$. Calculer $\sin(g(x))$.
- 6. Montrer que :

$$\forall x \in [0, \pi], h(x) = \begin{cases} \pi - g(x) & x \in [0, \arccos(4/5)] \\ g(x) & x \in [\arccos(4/5), \pi] \end{cases}$$

Partie 3 : Hors Barème (à ne pas traiter)

Cette partie n'est pas à traiter pendant le DS. Mais vous pouvez le faire hors DS pour vous entraîner.

Soit $a \in [0, \pi/2]$. On considère les fonctions h et k définies par

$$h(x) = \arcsin\left(\frac{2(x - \sin(a)) \cos(a)}{x^2 - 2x \sin(a) + 1}\right) \quad \text{et} \quad k(x) = \arctan\left(\frac{x - \sin(a)}{\cos(a)}\right).$$

7. Montrer que h et k sont définies sur $\mathbb{R}$.

Indic. : On pourra introduire la fonction $\varphi(x) = \frac{2(x - \sin(a)) \cos(a)}{x^2 - 2x \sin(a) + 1}$ et étudier son image.

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sin(2k(x))$.

9. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} -\pi - 2k(x) & \text{si } x < \sin(a) - \cos(a) \\ 2k(x) & \text{si } \sin(a) - \cos(a) \leq x \leq \sin(a) + \cos(a) \\ \pi - 2k(x) & \text{si } x > \sin(a) + \cos(a) \end{cases}$$

Problème 3 (Diamètre) :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée.

1. On note $\mathcal{D}_A$ l'ensemble des distances entre deux éléments de A , i.e.

$$\mathcal{D}_A = \{|x - y|, x, y \in A\}$$

(a) Montrer que $\mathcal{D}_A$ possède une borne supérieure. On note $\delta(A) = \sup \mathcal{D}_A$ que l'on appelle diamètre de A .

(b) Montrer que $\delta(A) \leq \sup A - \inf A$.

(c) On veut montrer que $\delta(A) = \sup A - \inf A$. On raisonne par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ majorant de $\mathcal{D}_A$ tel que $M < \sup A - \inf A$. Montrer alors qu'on aboutit à une contradiction et conclure.

2. Soit $B \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée telle que $A \subset B$.

(a) Montrer que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

(b) Montrer alors que $\delta(A) \leq \delta(B)$.

3. Soit $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$ bornée et telle que $A \cap B \neq \emptyset$.

(a) Justifier que $\delta(A \cup B)$ existe.

(b) Montrer alors que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.

Exercice 4 (BONUS) :

Cet exercice est hors barème et ne doit être abordé que si au moins 75% du sujet a été (correctement) traité.

Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 88$.