



DS 3

Équations Différentielles - Relations d'Ordres - Fonctions Usuelles

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 01 Octobre 2025

Problème 1 (Équations différentielles) :

On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0. \quad (E)$$

1. On considère l'équation différentielle

$$y' + xy = 0. \quad (F)$$

(F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficient continue sur $\mathbb{R}$. Une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$. Donc les solutions de (F) sont les

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x^2}, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $z : x \mapsto y'(x) + xy(x)$. y étant deux fois dérivable, y' est dérivable. Et donc, par somme d'applications dérivables, z est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = y''(x) + y(x) + xy'(x)$. Supposons z solution de (F). Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + xz(x) &= 0 \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + y(x) + xy'(x) + x(y'(x) + xy(x)) &= 0 \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 2xy'(x) + (x^2 + 1)y(x) &= 0 \\ \iff y \text{ solution de } (E) \end{aligned}$$

car y est deux fois dérivables.

3. Soit y une solution de (E). Donc, en particulier, par définition d'être solution de (E), y est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pose $z : x \mapsto y'(x) + xy(x)$. Alors z est dérivable comme somme d'applications dérivables. Et de plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = y''(x) + y(x) + xy'(x)$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + xz(x) = y''(x) + 2xy'(x) + (x^2 + 1)y(x) = 0$$

car y est solution de (E).

Donc, par définition, z est solution de (F).

4. D'après les deux questions précédentes, on vient de montrer que si y est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, alors $z : x \mapsto y'(x) + xy(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus, y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de (F).

Or, à la première question, on a résolu (F) . Et donc finalement, si y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\iff x \mapsto y'(x) + xy(x) \text{ solution de } (F) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) = \lambda e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

Donc y est solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continues sur $\mathbb{R}$ dont l'équation homogène associée est (F) . Il reste à trouver une solution particulière.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche donc une solution particulière de l'équation $y' + xy = \lambda e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Pour cela, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On pose $f : x \mapsto h(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } y' + xy &= \lambda e^{-x^2/2} \text{ sur } \mathbb{R} \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, h'(x)e^{-x^2/2} - xh(x)e^{-x^2/2} + xh(x)e^{-x^2/2} &= \lambda e^{-x^2/2} \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, h'(x) &= \lambda. \end{aligned}$$

Et donc $x \mapsto \lambda x e^{-x^2/2}$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $y' + xy = \lambda e^{-x^2/2}$. D'où, les solutions de $y' + xy = \lambda e^{-x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$ sont $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x^2/2}$, où $\mu \in \mathbb{R}$.

D'où : si y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \\ \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) &= \lambda e^{-x^2/2} \\ \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) &= (\lambda x + \mu)e^{-\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

Donc, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\lambda x + \mu)e^{-\frac{1}{2}x^2}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Problème 2 (Fonctions usuelles) :

Partie 1

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et donc $0 < 1 = 5 - 4 \leq 5 - 4 \cos(x) \leq 5 + 4 = 9$. Donc $x \mapsto \sqrt{5 - 4 \cos(x)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x + 2\pi) = f(x)$ par 2π -périodicité de $\cos$ et $\sin$. Par périodicité de f , on peut donc réduire son étude à $[-\pi, \pi]$. Mais on a également,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(-x)}} = -\frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} = -f(x)$$

par parité de $\cos$ et imparité de $\sin$. Donc la fonction f est impaire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine, on peut donc réduire son étude à $[0, \pi]$. On obtient son graphe sur $[-\pi, 0]$ par symétrie. Puis on étend sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

(b) Soit $x \in [0, \pi]$. D'après le début de la question précédente, $5 - 4 \cos(x) \geq 1$. D'où, par croissance de la fonction racine, $\frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \leq 1$.

De plus, comme $x \in [0, \pi]$, on a $\sin(x) \in [0, 1]$. Et donc, par produit,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \leq \sin(x).$$

(c) On a $f(0) = 0$. Si $x \in]0, \pi]$, alors

$$f(x) \leq \sin(x) < x$$

Donc l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0, \pi]$. Donc l'unique solution à l'équation $f(x) = x$ dans I est $x = 0$.

(d) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{5 - 4\cos(x)}$ est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I (voir question 1a). Par quotient de fonctions dérivable sur I dont le dénominateur ne s'annule pas, on en déduit que f est dérivable sur I également. Et

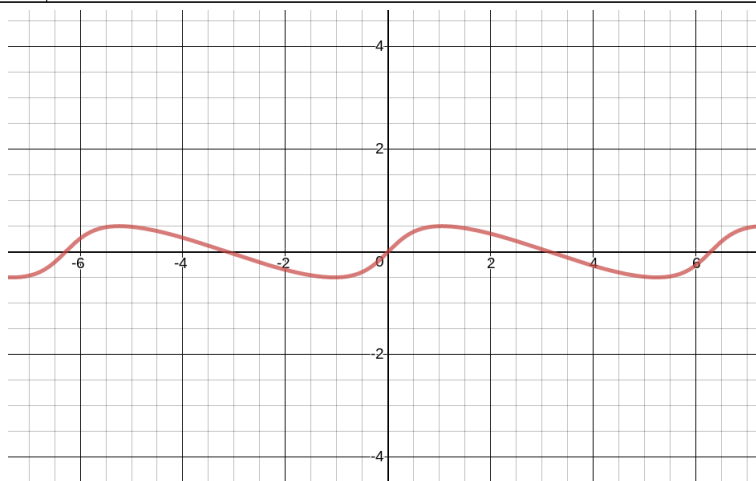
$$\begin{aligned} \forall x \in I, f'(x) &= \frac{\cos(x)\sqrt{5-4\cos(x)} - 2\frac{\sin(x)^2}{\sqrt{5-4\cos(x)}}}{5-4\cos(x)} \\ &= \frac{\cos(x)(5-4\cos(x)) - 2\sin(x)^2}{(5-4\cos(x))^{3/2}} \\ &= \frac{5\cos(x) - 2\cos(x)^2 - 2}{(5-4\cos(x))^{3/2}} \\ &= -\frac{2\cos(x)^2 - 5\cos(x) + 2}{(5-4\cos(x))^{3/2}} \end{aligned}$$

Le numérateur est un polynôme de degré 2 en $\cos(x)$ de discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$ et de racines 2 et 1/2. On en déduit donc, par factorisation,

$$\forall x \in I, f'(x) = -\frac{(\cos(x) - 2)(2\cos(x) - 1)}{(5 - 4\cos(x))^{3/2}}.$$

On en déduit donc le tableau de variations

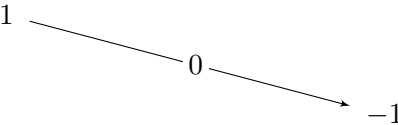
x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{2}$	0



2. (a) φ est dérivable sur $[-1, 1]$ comme quotient de fonctions qui le sont donc le dénominateur ne s'annule pas. Et

$$\forall t \in [1, 1], \varphi'(t) = \frac{-5(5-4t) + 4(4-5t)}{(5-4t)^2} = \frac{-9}{(5-4t)^2} < 0$$

Donc φ est strictement décroissante sur $[-1, 1]$. Et $\varphi(-1) = 1$ et $\varphi(1) = -1$. D'où le tableau de variations

t	-1	4/5	1
$\varphi'(t)$	-		
φ			

(b) On a $g = \arccos \circ \varphi \circ \cos$. Or $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ et $\varphi([-1, 1]) = [-1, 1]$. Donc g est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque $\arccos$ est définie sur $[-1, 1]$. Par ailleurs, par 2π -périodicité de $\cos$, g est aussi 2π -périodique. On peut donc restreindre l'intervalle d'étude de g à $[-\pi, \pi]$.

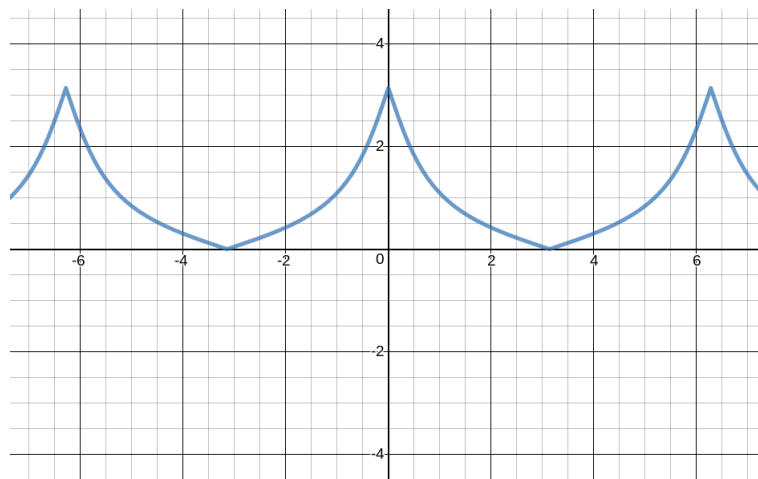
Mais si $x \in \mathbb{R}$, alors $g(-x) = g(x)$ par parité du cosinus. Donc g est paire. On peut donc l'étudier finalement sur $[0, \pi]$. Il suffit de faire ensuite la symétrie de g par rapport à l'axe des ordonnées pour pouvoir avoir g sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et la 2π -périodicité termine le travail.

(c) Par composée d'application dérivable, g est dérivable sur $]0, \pi[$ ($\arccos$ est dérivable sur $] -1, 1[$). Et

$$\begin{aligned}
 \forall x \in]0, \pi[, \quad g'(x) &= \frac{-\frac{9 \sin(x)}{(5-4 \cos(x))^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4-5 \cos(x)}{5-4 \cos(x)}\right)^2}} \\
 &= \frac{-9 \sin(x)(5-4 \cos(x))}{(5-4 \cos(x))^1 \sqrt{(5-4 \cos(x))^2 - (4-5 \cos(x))^2}} \\
 &= \frac{-9 \sin(x)}{(5-4 \cos(x)) \sqrt{9-9 \cos(x)^2}} \\
 &= \frac{-3 \sin(x)}{(5-4 \cos(x)) |\sin(x)|} \\
 &= \frac{-3}{5-4 \cos(x)} < 0 \quad \text{car } x \in]0, \pi[.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(g) &= g(\mathbb{R}) && \text{définition} \\
 &= g([0, \pi]) && \text{par périodicité et parité} \\
 &= \arccos(\varphi(\cos([0, \pi]))) && \text{car } g = \arccos \circ \varphi \circ \cos \\
 &= \arccos(\varphi([-1, 1])) \\
 &= \arccos([-1, 1]) \\
 &= [0, \pi]
 \end{aligned}$$



3. Soit $x \in [0, \pi/3]$.

(a) On a

$$\cos(g(x)) = \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}$$

et

$$\sin(g(x)) = \sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right)^2} = \frac{\sqrt{9 - 9 \cos(x)^2}}{5 - 4 \cos(x)} = \frac{3|\sin(x)|}{5 - 4 \cos(x)} = \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}$$

car $5 - 4 \cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$ car $x \in [0, \pi/3]$.

(b) On en déduit

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{\frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}}{\sqrt{5 - 4 \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}}} \\ &= \frac{3 \sin(x) \sqrt{5 - 4 \cos(x)}}{(5 - 4 \cos(x)) \sqrt{5(5 - 4 \cos(x)) - 4(4 - 5 \cos(x))}} \\ &= \frac{3 \sin(x)}{\sqrt{9(5 - 4 \cos(x))}} \\ &= \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} g([0, \pi/3]) &= \arccos(\varphi([1/2, 1])) \\ &= \arccos([\varphi(1), \varphi(1/2)]) && \text{car } \varphi \text{ décroissante} \\ &= \arccos([-1, 1/2]) \\ &= \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] \end{aligned}$$

On en déduit donc que si $x \in [0, \pi/3]$, alors il existe un unique $y \in [\pi/3, \pi]$ tel que $f(x) = f(y)$ et $y = g(x)$ (l'unicité vient de la stricte décroissance de g sur $[0, \pi]$ qui en fait donc une application bijective).

Partie 2

On pose

$$h(x) = \arcsin\left(\frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right).$$

4. On considère l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)} \end{array}$$

Alors ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$ par quotient d'applications définies sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas (voir étude de φ de la partie 1). Et même, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient d'applications dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

D'autre part, ψ est 2π -périodique car quotient d'applications 2π -périodique. On étudie donc ψ sur $[-\pi, \pi]$.

Et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = \frac{3 \cos(x)(5 - 4 \cos(x)) - 12 \sin(x)^2}{(5 - 4 \cos(x))^2} = \frac{3(5 \cos(x) - 4)}{(5 - 4 \cos(x))^2}.$$

Soit $x \in [0, \pi]$. Alors

$$\begin{aligned} \psi'(x) \geq 0 &\iff 5 \cos(x) - 4 \geq 0 \\ &\iff \cos(x) \geq \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \arccos(\cos(x)) &\leq \arccos(4/5) && \text{car } \arccos \text{ décroissante} \\ \iff x &\leq \arccos(4/5) && \text{car } x \in [0, \pi] \text{ et } \arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1} \end{aligned}$$

Soit $x \in [-\pi, 0]$. Alors

$$\begin{aligned} \psi'(x) \geq 0 &\iff 15 \cos(x) - 12 \geq 0 \\ &\iff \cos(x) \geq 4/5 \\ &\iff \arccos(\cos(x)) \leq \arccos(4/5) && \text{car } \arccos \text{ décroissante} \\ &\iff \arccos(\cos(-x)) \leq \arccos(4/5) && \text{car } \cos \text{ pair} \\ &\iff -x \leq \arccos(4/5) && \text{car } -x \in [0, \pi] \\ &\iff x \geq -\arccos(4/5) \end{aligned}$$

On en déduit donc le tableau de variations :

x	$-\pi$	$-\arccos(4/5)$	0	$\arccos(4/5)$	π		
$\psi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
ψ	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

D'après le tableau de variation et par 2π -périodicité de ψ , on en déduit donc $\psi(\mathbb{R}) = \psi([-\pi, \pi]) = [-1, 1]$. Or $\arcsin$ est défini sur $[-1, 1]$. Donc $h = \arcsin \circ \psi$ est défini sur $\mathbb{R}$.

Et par 2π -périodicité de ψ , h est également 2π -périodique. On peut donc l'étudier seulement sur $[-\pi, \pi]$.

5. Soit $x \in [0, \pi]$. Alors

$$\begin{aligned} \sin(g(x)) &= \sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{9 - 9 \cos(x)^2}}{5 - 4 \cos(x)} && \text{car } 5 - 4 \cos(x) \geq 0 \text{ cf partie 1} \\ &= \frac{3|\sin(x)|}{5 - 4 \cos(x)} \\ &= \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)} && \text{car } x \in [0, \pi] \text{ donc } \sin(x) \geq 0. \end{aligned}$$

6. Soit $x \in [0, \pi]$. D'après la question précédente et par définition de $\arcsin$, on a montré

$$\sin(g(x)) = \sin(h(x)).$$

Or $\arcsin(\sin(h(x))) = h(x)$ car $h(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$. Comme $g(x) \in [0, \pi]$ par définition de $\arccos$, on a, d'après l'étude des fonctions de la partie 1 :

$$\begin{aligned} h(x) &= \arcsin(\sin(g(x))) \\ &= \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \in [0, \pi/2] \\ \arcsin(-\sin(g(x) - \pi)) & \text{si } g(x) \in [\pi/2, \pi] \end{cases} \\ &= \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \in [0, \pi/2] \\ -(g(x) - \pi) & \text{si } g(x) \in [\pi/2, \pi] \end{cases} \\ &= \begin{cases} g(x) & \text{si } \frac{4-5 \cos(x)}{5-4 \cos(x)} \in [0, 1] \\ \pi - g(x) & \text{si } \frac{4-5 \cos(x)}{5-4 \cos(x)} \in [-1, 0] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } \varphi(\cos(x)) \in [0, 1] \\ \pi - g(x) & \text{si } \varphi(\cos(x)) \in [-1, 0] \end{cases} \\
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } \cos(x) \in [-1, 4/5] \\ \pi - g(x) & \text{si } \cos(x) \in [4/5, 1] \end{cases} \\
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [\arccos(4/5), \pi] \\ \pi - g(x) & \text{si } x \in [0, \arccos(4/5)] \end{cases}
\end{aligned}$$

Partie 3 : Hors barème (à ne pas traiter)

7. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction k est également définie sur $\mathbb{R}$. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$. Donc h est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{2(x - \sin(a)) \cos(a)}{x^2 - 2x \sin(a) + 1} \in [-1, 1].$$

On va commencer par étudier le dénominateur. C'est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 4 \sin(a)^2 - 4 = -4 \cos(a)^2 < 0$. Donc le minimum est atteint en $x = \sin(a)$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 \sin(a)x + 1 \geq \sin(a)^2 - 2 \sin(a)^2 + 1 = 1 - \sin(a)^2 = \cos(a)^2 > 0.$$

Donc le dénominateur ne s'annule jamais.

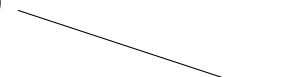
On pose $\varphi(x) = \frac{2(x - \sin(a)) \cos(a)}{x^2 - 2x \sin(a) + 1}$. φ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables (polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas, et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) &= 2 \cos(a) \frac{x^2 - 2x \sin(a) + 1 - 2(x - \sin(a))^2}{(x^2 - 2x \sin(a) + 1)^2} \\
&= 2 \cos(a) \frac{-x^2 + 2x \sin(a) + 1 - 2 \sin(a)^2}{(x^2 - 2x \sin(a) + 1)^2} \\
&= -2 \cos(a) \frac{x^2 - 2x \sin(a) + 2 \sin(a)^2 - 1}{(x^2 - 2x \sin(a) + 1)^2}
\end{aligned}$$

On cherche donc le signe du numérateur qui est une fonction polynomiale de degré 2 de discriminant $\Delta = 4 \sin(a)^2 - 4(2 \sin(a)^2 - 1) = -4 \sin(a)^2 + 4 = 4 \cos(a)^2 > 0$. On obtient donc deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{2 \sin(a) - 2 \cos(a)}{2} = \sin(a) - \cos(a) \quad \text{et} \quad x_2 = \sin(a) + \cos(a)$$

On a donc le tableau de variations

x	$-\infty$	$\sin(a) - \cos(a)$		$\sin(a) + \cos(a)$		$+\infty$	
$\varphi'(x)$		-	0	+	0	-	
φ	0					1	
			-1			0	

Et le calcul fourni

$$\begin{aligned}
\varphi(\sin(a) - \cos(a)) &= \frac{-2 \cos(a)^2}{\sin(a)^2 - 2 \sin(a) \cos(a) + \cos(a)^2 - 2 \sin(a)^2 + 2 \sin(a) \cos(a) + 1} \\
&= \frac{-2 \cos(a)^2}{2 - 2 \sin(a)^2}
\end{aligned}$$

$$= -1$$

et

$$\begin{aligned}\varphi(\sin(a) + \cos(a)) &= \frac{2 \cos(a)^2}{\sin(a)^2 + 2 \sin(a) \cos(a) + \cos(a)^2 - 2 \sin(a)^2 - 2 \sin(a) \cos(a) + 1} \\ &= \frac{2 \cos(a)^2}{2 - 2 \sin(a)^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\varphi(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Et ainsi, par composition, que h est définie sur $\mathbb{R}$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin(2k(x)) &= 2 \sin(k(x)) \cos(k(x)) \\ &= 2 \frac{\frac{x - \sin(a)}{\cos(a)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x - \sin(a)}{\cos(a)}\right)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x - \sin(a)}{\cos(a)}\right)^2}} \\ &= \frac{2(x - \sin(a))}{\cos(a)} \times \frac{\cos(a)^2}{\cos(a)^2 + (x - \sin(a))^2} \\ &= \frac{2(x - \sin(a)) \cos(a)}{x^2 - 2x \sin(a) + 1} \\ &= \sin(h(x))\end{aligned}$$

9. On déduit de la question précédente que $h(x) \equiv 2k(x)[2\pi]$ ou $h(x) \equiv \pi - 2k(x)[2\pi]$. Mais par définition de arcsin, on a $h(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Et par définition de arctan, $k(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Donc $2k(x) \in]-\pi, \pi[$. On aura donc

$$h(x) = \begin{cases} 2k(x) & \text{si } -\pi/4 \leq k(x) \leq \pi/4 \\ -\pi - 2k(x) & \text{si } -\pi/2 < k(x) < -\pi/4 \\ \pi - 2k(x) & \text{si } \pi/4 < k(x) < \pi/2 \end{cases}$$

Il reste donc "juste" à déterminer les conditions sur x pour que $k(x)$ soit dans l'un ou l'autre de ces intervalles.

Par bijectivité de la fonction tangente sur $] -\pi/2, \pi/2[$ et stricte croissance, on a

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{4} \leq k(x) \leq \frac{\pi}{4} &\iff -1 \leq \frac{x - \sin(a)}{\cos(a)} \leq 1 \\ &\iff -\cos(a) \leq x - \sin(a) \leq \cos(a) \\ &\iff \sin(a) - \cos(a) \leq x \leq \cos(a) + \sin(a) \\ &\iff -2 \cos(a + \pi/4) \leq x \leq 2 \cos(a - \pi/4)\end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{2} < k(x) < -\frac{\pi}{4} &\iff \frac{x - \sin(a)}{\cos(a)} < -1 \\ &\iff x < \sin(a) - \cos(a)\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} < k(x) < \frac{\pi}{2} &\iff 1 < \frac{x - \sin(a)}{\cos(a)} \\ &\iff \cos(a) + \sin(a) < x\end{aligned}$$

Par conséquent on en déduit

$$h(x) = \begin{cases} -\pi - 2k(x) & \text{si } x < \sin(a) - \cos(a) \\ 2k(x) & \text{si } \sin(a) - \cos(a) \leq x \leq \sin(a) + \cos(a) \\ \pi - 2k(x) & \text{si } x > \sin(a) + \cos(a) \end{cases}$$

Problème 3 (Relation d'Ordre) :

1. A est non vide et bornée dans $\mathbb{R}$, donc $\sup A$ et $\inf A$ existent par propriété de la borne sup et inf de $\mathbb{R}$.

(a) A étant non vide, on sait qu'il existe $a \in A$. Alors $0 = |a - a| \in \mathcal{D}_A$. Et donc $\mathcal{D}_A \neq \emptyset$.

On sait que A est majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq M$. Alors $\forall x, y \in A, |x - y| \leq |x| + |y| \leq 2M$ par inégalité triangulaire. Par conséquent, $\mathcal{D}_A$ est majorée dans $\mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_A$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc $\delta(A) = \sup \mathcal{D}_A$ existe par propriété de la borne sup de $\mathbb{R}$.

Au passage, comme $\forall x \in A, x \geq 0$, on a $\mathcal{D}_A \subset \mathbb{R}_+$. Et $0 \in \mathcal{D}_A$. Donc $\mathcal{D}_A$ est minorée et $\inf \mathcal{D}_A = 0 = \min \mathcal{D}_A$.

(b) On sait que $\forall a \in A, \inf A \leq a \leq \sup A$. Et donc, $\forall b \in A, -\sup A \leq -b \leq -\inf A$. Et donc, par sommation des inégalités, $\forall a, b \in A, \inf A - \sup A \leq a - b \leq \sup A - \inf A$. Autrement dit, $\forall a, b \in A, |a - b| \leq |\sup A - \inf A|$. Mais bien sûr, comme $\sup A \geq \inf A$, on a donc $|\sup A - \inf A| = \sup A - \inf A$. Donc $\forall x \in \mathcal{D}_A, x \leq \sup A - \inf A$. Donc $\sup A - \inf A$ est un majorant de $\mathcal{D}_A$. Et par définition de la borne sup de $\mathcal{D}_A$, $\delta(A) \leq \sup A - \inf A$.

(c) On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ majorant de $\mathcal{D}_A$ tel que $M < \sup A - \inf A$. Comme $\mathcal{D}_A \subset \mathbb{R}_+$, alors $M \geq 0$. On pose $\varepsilon = \frac{\sup A - \inf A - M}{2} > 0$. Donc $\exists a, b \in A$ tels que $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$ et $\inf A \leq b < \inf A + \varepsilon$. Ce qui nous donne $-\inf A - \varepsilon < -b \leq -\inf A$. Et donc, par sommation des inégalités, $\sup A - \varepsilon - \inf A - \varepsilon = \sup A - \inf A - 2\varepsilon = M < a - b \leq \sup A - \inf A$.

Par ailleurs, comme $M \geq 0$, on en déduit $a - b \geq 0$ et donc $|a - b| = a - b$. Donc $a - b \in \mathcal{D}_A$. Et donc ☹ avec la définition de M majorant de $\mathcal{D}_A$.

Donc $\sup A - \inf A$ est le plus petit des majorants de $\mathcal{D}_A$ et donc $\delta(A) = \sup A - \inf A$ par définition de la borne sup.

2. Comme B est non vide et bornée, $\sup B$ et $\inf B$ existe par propriété de la borne sup et inf de $\mathbb{R}$.

(a) On sait que $\forall a \in A, a \in B$. Donc $\forall a \in A, \inf B \leq a \leq \sup B$ par définition de la borne sup et inf de B .

Donc $\sup B$ est un majorant de A . Et la def $\sup A$ nous fournit alors $\sup A \leq \sup B$. De même, $\inf B$ est un minorant de A , donc $\inf B \leq \inf A$ par définition de $\inf A$. On en déduit donc, $\forall a \in A, \inf B \leq \inf A \leq a \leq \sup A \leq \sup B$. Ce qui nous fournit les inégalités désirées.

(b) Comme B est non vide et bornée, on peut appliquer la question précédente et $\delta(B)$ existe. On a alors aussi $\delta(B) = \sup B - \inf B$.

Par ailleurs, les inégalités de la question précédente nous fournissent $\delta(A) = \sup A - \inf A \leq \sup B - \inf A \leq \sup B - \inf B = \delta(B)$. En effet, on a $-\inf A \leq -\inf B$.

3. (a) A est non vide donc $A \cup B$ est non vide puisque $A \subset A \cup B$. On considère $M, M' \in \mathbb{R}$ une borne de A et de B . Alors $\forall x \in A \cup B, |x| \leq M + M'$. Donc $A \cup B$ est bornée. Donc $\delta(A \cup B) = \sup(A \cup B) - \inf(A \cup B)$ existe par la question 1.

On rappelle, comme dans une remarque un peu plus haut que $\delta(A) \geq 0$ et $\delta(B) \geq 0$.

Pour montrer l'inégalité demandée, on va faire une disjonction de cas. Soit $r \in \mathcal{D}_{A \cup B}$. Donc $\exists x, y \in A \cup B$ tels que $r = |x - y|$. Il y a donc quatre cas possible.

▪ Si $x, y \in A$.

Alors $r = |x - y| \in \mathcal{D}_A$ et donc $r \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B)$.

▪ Si $x \in B$ et $y \in B$.

Alors $r = |x - y| \in \mathcal{D}_B$. Donc $r \leq \delta(B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.

▪ Si $x \in A$ et $y \in B$.

On sait que $A \cap B \neq \emptyset$. Soit donc $\alpha \in A \cap B$. Alors $r = |x - y| \leq |x - \alpha| + |\alpha - y|$ par inégalité triangulaire. Mais $|x - \alpha| \in \mathcal{D}_A$ et $|\alpha - y| \in \mathcal{D}_B$. Donc $r \leq \delta(A) + \delta(B)$.

▪ Si $x \in B$ et $y \in A$.

On raisonne de la même manière : $r \leq |x - \alpha| + |\alpha - y| \leq \delta(B) + \delta(A)$.

On vient de montrer que dans tous les cas, $r \leq \delta(A) + \delta(B)$. Ce qui termine la démonstration.

Exercice 4 (BONUX) :

L'application $f : x \mapsto x \lfloor x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ par produit et composée de fonctions croissantes et positives. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n^4$. Et $f(3) = 3^4 = 81$ et $f(4) = 4^4 = 256$. Donc, par croissance de f , $x \in]3, 4[$. Donc $\lfloor x \rfloor = 3$.

On peut écrire $x = 3 + a$ avec $a \in]0, 1[$ ($x \notin \mathbb{N}$). Donc

$$\begin{aligned} f(x) = 88 &\iff (3+a) \lfloor (3+a) \lfloor 3(3+a) \rfloor \rfloor = 88 \\ &\iff (3+a) \lfloor (3+a)(9 + \lfloor 3a \rfloor) \rfloor = 88 \\ &\iff 27a + (3+a) \lfloor 9a + (3+a) \lfloor 3a \rfloor \rfloor = 7 \end{aligned}$$

Et donc $27a \leq 7$. Donc $a < 1/3$. Donc $\lfloor 3a \rfloor = 0$. Donc

$$27a + (3+a) \lfloor 9a \rfloor = 7.$$

De plus, $a \in]0, 1/3[\implies 0 < 9a < 3$. Donc $\lfloor 9a \rfloor \in \{0, 1, 2\}$.

Si $\lfloor 9a \rfloor = 0$, alors $27a = 7$. Donc $\lfloor 9a \rfloor = \left\lfloor \frac{9 \times 7}{27} \right\rfloor = 2$. ☠.

Si $\lfloor 9a \rfloor = 2$, alors $27a + 6 + 2a = 7 \iff a = 1/29$. Et donc $\lfloor 9a \rfloor = \lfloor 9/29 \rfloor = 0$. ☠.

Donc $\lfloor 9a \rfloor = 1$. Donc $27a + 3 + a = 7 \iff a = 1/7$. On vérifie : $\lfloor 9a \rfloor = \lfloor 9/7 \rfloor = 1$. Et donc

$$x = 3 + 1/7 = \frac{22}{7}.$$