NOM :
Prénom :

Mercredi 12 Novembre 2025

Lycée Loges

Interrogation 7

Suites 1

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'une suite convergente.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si $\exists \ell \in \mathbb{K}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On notera alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

2. Théorème de la limite monotone (un seul cas).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée. Et dans ce cas $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$. De plus, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non minorée.

3. Théorème des gendarmes.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

4. Définition de deux suites adjacentes.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante (ou le contraire) et $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

5. Borne suite à partir d'une borne d'une limite.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < \ell$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $a < u_n$. Et si $\ell < b$, alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$, $u_n < b$.

6. Variation d'une suite récurrente d'ordre 1.
Soit $f : I \to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Si f est décroissante, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de monotonies contraires.

7. Limite potentielle d'une suite récurrente d'ordre 1.
Soit $f : I \to I$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $f(\ell) = \ell$.

8. Passage à la limite dans les inégalités.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ telles que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors $\ell \leq \ell'$.

Exercice 2 :
Soit $p \in \mathbb{R}_+$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - (p+1)u_{n+1} + \frac{2p+1}{4}u_n = 0$. Déterminer l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels, d'équation caractéristique $r^2 - (p+1)r + \frac{2p+1}{4} = 0$ et donc de discriminant $\Delta = (p+1)^2 - 2p - 1 = p^2 \geq 0$.

Si $p = 0$, alors $\Delta = 0$ et donc l'équation caractéristique admet une unique racine (double) $r_0 = \frac{p+1}{2} = 1/2$. Donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu)(1/2)^n$. Or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Donc $\mu = 0$ et $(\lambda + \mu)/2 = 1$. Donc $\lambda = 2$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Si $p \neq 0$, alors $\Delta > 0$. Et donc l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{p+1-p}{2} = 1/2$ car $p \geq 0$ et $r_2 = \frac{p+1+p}{2} = p + 1/2$. Donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda(1/2)^n + \mu(p+1/2)^n$. Or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Donc $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda/2 + \mu(p+1/2) = 1$. Donc $\mu = 1/p$. Et donc $\lambda = -p/2$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2^n} + \left(\frac{2p+1}{2}\right)^n\right) = \frac{1 + (2p+1)^n}{2^n p}.$$