



Interrogation 9

Groupes - Anneaux - Corps

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition du noyau d'un morphisme de groupe.

Soit $(G, *)$ et $(H, \cdot)$ deux groupes, $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupe. On définit le noyau de f , noté $\ker(f)$, par

$$\ker(f) = f^{-1}(\{e_H\}) = \{g \in G, f(g) = e_H\}$$

où e_H est l'élément neutre de H .

2. Caractérisation des sous-groupes.

Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$. H est un sous-groupe de G , si et seulement si, $H \neq \emptyset$ et $\forall h, h' \in H, h^{-1} * h' \in H$.

3. Définition d'un anneau.

Soit A un ensemble muni de deux LCI $+$ et $*$. Alors $(A, +, *)$ un anneau, si $(A, +)$ est un groupe abélien, $\exists 1_A \in A$ tel que $\forall x \in A, 1_A * x = x * 1_A = x$ (élément neutre pour $*$) et $\forall x, y, z \in A, (x + y) * z = x * z + y * z$ (distributivité de $*$ sur $+$), et $\forall a, b, c \in A, a * (b * c) = (a * b) * c$ ($*$ est associative).

4. Binôme de Newton.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau, $a, b \in A$. Si a et b commutent (i.e. si $ab = ba$), alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

5. Définition de la commutativité et associativité d'une LCI.

Soit G un ensemble muni d'une LCI $*$. On dit que $*$ est commutative si $\forall a, b \in G, a * b = b * a$. On dit que $*$ est associative si $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$.

6. Caractérisation des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Soit si $H \subset \mathbb{Z}$, alors H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

7. Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

Soit $H \subset \mathbb{R}$. Si H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, alors $\exists a \in \mathbb{R}_+$ tel que $H = a\mathbb{Z}$ ou H est dense dans $\mathbb{R}$.

8. Définition d'un morphisme de groupe.

Soit $(G, *)$, $(H, \star)$ deux groupes, $f : G \rightarrow H$. On dit que f est un morphisme de groupe si $\forall g, g' \in G, f(g * g') = f(g) \star f(g')$.

Exercice 2 :

Montrer que $\mathbb{R}$ est un groupe pour la loi $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = x + y + 1$.

Tout d'abord, $*$ est clairement une LCI sur $\mathbb{R}$ car $+$ est une LCI sur $\mathbb{R}$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = x + y + 1 = y + x + 1 = y * x$ car $+$ est commutative sur $\mathbb{R}$. Donc $*$ est commutative.

$\forall x \in \mathbb{R}, x * (-1) = x - 1 + 1 = x$. Et donc, par commutativité, $\forall x \in \mathbb{R}, x * (-1) = (-1) * x = x$. Donc -1 est élément neutre de $*$.

$\forall x \in \mathbb{R}, x * (-x - 2) = x + (-x - 2) + 1 = -1$. Et donc, par commutativité, $\forall x \in \mathbb{R}, x * (-x - 2) = (-x - 2) * x = -1$. Donc tout élément de $\mathbb{R}$ est inversible pour $*$.

Et enfin :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z &= (x + y + 1) * z && \text{def } * \\ &= (x + y + 1) + z + 1 && \text{def } * \\ &= x + (y + z + 1) + 1 && \text{comm et asso } + \\ &= x + (y * z) + 1 && \text{def } * \end{aligned}$$

$$= x * (y * z)$$

def *

Donc * est associative.

Donc, par définition, $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.