



DM 2

Arg ! Des ch !

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 14 Octobre 2025

Partie I : Généralités autour des fonctions hyperboliques

1. Fonction argsh

(a) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{2}$. On a

$$1 - e^{-2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

donc

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

par produit. Par imparité, on en déduit

$$\operatorname{sh}(x) = -\operatorname{sh}(-x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty.$$

(b) On sait que la fonction sh est continue (et dérivable) sur $\mathbb{R}$. Par le TVI, un corollaire du TVI, théorème de la limite monotone, on a $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc sh est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, le sh est strictement croissant, donc injective. Donc sh est bijective sur $\mathbb{R}$.

On appelle $\operatorname{argsh} = \operatorname{sh}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(c) Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{sh}(x) = y$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) = y &\iff e^x - e^{-x} = 2y \\ &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\iff (e^x - y)^2 - 1 - y^2 \\ &\iff (e^x - y)^2 = 1 + y^2 \\ &\iff |e^x - y| = \sqrt{1 + y^2} \\ &\iff e^x = y \pm \sqrt{1 + y^2}. \end{aligned}$$

Mais $1 + y^2 > y^2$, donc, par stricte croissance de la fonction racine, $\sqrt{1 + y^2} > \sqrt{y^2} = |y| \geq y$. On en déduit donc $y - \sqrt{1 + y^2} < 0$. Or $e^x > 0$. D'où

$$e^x = y + \sqrt{1 + y^2} \iff x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

D'autre part, par bijectivité de sh , $\operatorname{sh}(x) = y \iff x = \operatorname{argsh}(y)$. Par unicité de la fonction réciproque, on en déduit donc $\operatorname{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.

On notera qu'on a montré en particulier que $\forall y \in \mathbb{R}, y + \sqrt{1 + y^2} > 0$. Donc l'expression de argsh est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Fonction argch

(a) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. D'où

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

et par parité de ch, on a aussi $\text{ch}(x) = \text{ch}(-x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

(b) On sait que ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc en particulier injective. Et par le TVI, un corollaire du TVI et le théorème de la limite monotone, on a $\text{ch}(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$. Donc ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

On note argch la bijection réciproque, i.e. $\text{argch} = (\text{ch}|_{\mathbb{R}_+})^{-1}$.

(c) Soit $x \geq 0$ et $y \geq 1$ tels que $\text{ch}(x) = y$. Alors

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) = y &\iff e^x + e^{-x} = 2y \\ &\iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \\ &\iff (e^x - y)^2 = y^2 - 1 \\ &\iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \end{aligned} \quad \text{car } y \geq 1 \implies y^2 \geq 1$$

(d) Soit $x \geq 0$ et $y \geq 1$ tels que $\text{ch}(x) = y$. On a alors

$$\begin{aligned} y &\geq 1 \\ &\iff -2y + 1 \leq -1 \\ &\iff (y - 1)^2 \leq y^2 - 1 \\ &\iff y - 1 \leq \sqrt{y^2 - 1} \end{aligned} \quad \text{car } y - 1 \geq 0$$

$$\iff y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1.$$

Or d'après la question précédente, on a $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ ou $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$ et $e^x \geq 1$ car $x \geq 0$. Donc $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$. Et donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Par unicité de la réciproque, on en déduit alors $\text{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Partie II : Étude d'une fonction particulière

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(x) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

On se propose de donner une expression simple de f par trois méthodes différentes.

3. Première méthode : Étude de fonction

(a) arcsin est définie sur $[-1, 1]$. arctan est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Et $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Par ailleurs, on a le tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$	2	0	$-$
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$	0	$+$	$-$

Donc par composition, $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est définie sur $]-1, 1[$.

Finalement, f est définie sur $[-1, 1] \cap [-1, 1[= [-1, 1[$.

- (b) On sait que $\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$, $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc, par composition, $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est dérivable en tout $x \in [-1, 1[$ tel que $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Donc, d'après la tableau de signe de la question précédente, $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est dérivable sur $]-1, 1[$.

Finalement, par composée, puis sommes d'applications dérivables, f est dérivables sur $]-1, 1[$. Et :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2 \frac{1}{1 + \frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{1-x + (1+x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x}{1-x+1+x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc f est une fonction constante sur $]-1, 1[$. Or $f(0) = -2 \arctan(1) = -\frac{\pi}{2}$ et f est continue sur $[-1, 1[$, donc

$$\forall x \in [-1, 1[, f(x) = \arcsin(x) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

4. Deuxième méthode : avec des fonctions hyperboliques :

- (a) On a $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijective et $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$ surjective mais non injective. Donc, par quotient d'applications dont le dénominateurs ne s'annule pas, $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, -2e^{-x} < 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -e^{-x} < e^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) < \operatorname{ch}(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) < 1 \end{aligned}$$

car $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geq 1 > 0$.

Et de même,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, 2e^x > 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -e^x < e^x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -e^{-x} - e^x < e^x - e^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -\operatorname{ch}(x) < \operatorname{sh}(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -1 < \operatorname{th}(x). \end{aligned}$$

D'où l'on déduit $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) \in]-1, 1[$.

(On aurait pu le montrer à partir de l'étude de th en dérivant et en faisant un tableau de variations).

- (b) On pourrait montrer que th est bijective en faisant une étude de fonction.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$ tel que $\operatorname{th}(x) = y$. On résout cette équation d'inconnue x .

$$\operatorname{th}(x) = y \iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \\
&\Longleftrightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1) \\
&\Longleftrightarrow (1 - y)e^{2x} = 1 + y \\
&\Longleftrightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \quad \text{car } y < 1 \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right) \quad \text{cf étude signe 3a}
\end{aligned}$$

On note alors $\operatorname{argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$. D'après l'étude de signe de 3a, argth est bien définie sur $] -1, 1[$. Et d'autre part, par le calcul précédent, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argth}(\operatorname{th}(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1, 1[, \operatorname{th}(\operatorname{argth}(x)) = x.$$

Donc $\operatorname{argth} \circ \operatorname{th} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$ et $\operatorname{th} \circ \operatorname{argth} = \operatorname{Id}_{]-1, 1[}$. D'où l'on déduit, par caractérisation de la bijectivité, que th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$ et que

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}^{-1} = \operatorname{argth} : \quad]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).
\end{aligned}$$

(c) Soit $y, z \in \mathbb{R}$. On a $\operatorname{th}(y) \in]-1, 1[$ donc en particulier $\operatorname{th}(y) \neq 1$. On résout l'équation en y :

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \operatorname{th}(y)}{1 - \operatorname{th}(y)} &= e^z \\
\Longleftrightarrow \frac{1 + \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}}{1 - \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}} &= e^z \\
\Longleftrightarrow \frac{e^{2y} + 1 + e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1 - e^{2y} + 1} &= e^z \\
\Longleftrightarrow e^{2y} &= e^z \\
\Longleftrightarrow 2y &= z \quad \text{bijectivité de exp}
\end{aligned}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\cos(2 \arctan(e^x)) &= 2 \cos(\arctan(e^x))^2 - 1 \\
&= \frac{2}{1 + e^{2x}} - 1 \\
&= \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \\
&= -\operatorname{th}(x).
\end{aligned}$$

(e) Soit $x \in]-1, 1[$. On pose $y = \operatorname{argth}(x) \in \mathbb{R}$. Alors $x = \operatorname{th}(y)$ par bijectivité de la fonction th et parce que $\operatorname{th}^{-1} = \operatorname{argth}$. Alors, d'après la question précédente, $e^{2y} = \frac{1 + \operatorname{th}(y)}{1 - \operatorname{th}(y)}$.

Finalement,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \arcsin(x) - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) \\
&= \arcsin(\operatorname{th}(y)) - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1 + \operatorname{th}(y)}{1 - \operatorname{th}(y)}} \right) \\
&= \arcsin(\operatorname{th}(y)) - 2 \arctan \left(\sqrt{e^{2y}} \right) \\
&= \arcsin(\operatorname{th}(y)) - 2 \arctan(e^y)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la question précédente, $\cos(2 \arctan(e^y)) = -\operatorname{th}(y)$. Mais $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ et $\arctan$ est impaire et croissante. Donc $\arctan : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \pi/2[$. Donc $2 \arctan(e^y) \in]0, \pi[$. Or $\cos|_{[0, \pi]}$ est bijective et $\arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1}$. Donc $2 \arctan(e^y) = \arccos(-\operatorname{th}(y))$.

On en déduit

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin(\operatorname{th}(y)) - \arccos(-\operatorname{th}(y)) \\ &= -(\arcsin(-\operatorname{th}(y)) + \arccos(-\operatorname{th}(y))) && \text{imparité arcsin} \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

5. Troisième méthode : Avec des fonctions circulaires.

- (a) Soit $x \in [-1, 1[$. $\cos$ est strictement décroissante sur $]0, \pi]$, donc $\cos$ est injective et $\cos(]0, \pi]) = [\cos(\pi), \cos(0)[= [-1, 1[$. Donc $\cos$ établit une bijection de $]0, \pi]$ sur $[-1, 1[$. D'où pas bijectivité, $\exists! \theta \in]0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.
- (b) Soit $x \in [-1, 1[$. Soit $\theta \in]0, \pi]$ unique d'après la question précédente, tel que $x = \cos(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin(x) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \\ &= \arcsin(\cos(\theta)) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}}\right) \\ &= \arcsin(\sin(\pi/2 - \theta)) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{2\cos(\theta/2)^2}{2\sin(\theta/2)^2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta - 2 \arctan\left(\frac{1}{\tan(\theta/2)}\right) && \begin{array}{l} \text{car } \frac{\pi}{2} - \theta \in [-\pi/2, \pi/2[\\ \text{et } \cos(\theta/2), \sin(\theta/2) \geq 0 \end{array} \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta - 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\tan(\theta/2))\right) && \begin{array}{l} \text{car } \tan(\theta/2) > 0 \\ \text{car } \theta/2 \in]0, \pi/2] \end{array} \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta - \pi + \theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$