



Interrogation 10

Espaces Vectoriels

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de l'espace engendré par une famille de vecteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $e_1, \dots, e_n \in E$. L'espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_n$, noté $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, est défini par

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

2. Caractérisation des sev.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $F \subset E$. Alors F est un sev de E si, et seulement si, $0_E \in F$ et $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$.

3. Définition d'une somme directe.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F, G des sev de E . On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$.

4. Caractérisation des sommes directes.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F, G des sev de E . F et G sont en somme directe si, et seulement si, $\forall x \in F+G, \exists!(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$.

5. Définition de sev supplémentaires.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F, G des sev de E . F et G sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.

6. Espaces engendrés et inclusion.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $A, B \subset E$. Si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

7. Espaces engendrés par une réunion.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $A, B \subset E$. Alors $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

8. Définition d'une famille libre.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $e_1, \dots, e_n \in E$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre (ou les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont linéairement indépendants) si $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, (\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0)$.

Exercice 2 :

Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)\}$. Montrer que F est un $\mathbb{R}$ -ev. Soit $G = \text{Vect}(x \mapsto 1)$. Montrer que F et G sont en somme directe.

$F \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition et la fonction constante égale à $0_{\mathbb{R}}$ est clairement un élément de F car $0 = 0 + 0$. Soit $f, g \in F, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -ev. Et

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, (\lambda f + g)(x+y) &= \lambda f(x+y) + g(x+y) && \text{def opé } \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ &= \lambda(f(x) + f(y)) + (g(x) + g(y)) && f, g \in F \\ &= (\lambda f(x) + g(x)) + (\lambda f(y) + g(y)) && (\mathbb{R}, +, \times) \text{ anneaux commutatif} \\ &= (\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(y) && \text{def opé } \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Donc $\lambda f + g \in F$ par définition de F .

Donc F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par caractérisation des sev.

G est clairement un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ également car $x \mapsto 1 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $f \in F \cap G$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, f : x \mapsto \lambda$ par définition de G et des opérations entre fonctions. Or $f \in F$. Donc, en particulier, $f(1) = f(0) + f(1)$. Et donc $\lambda = \lambda + \lambda$. Donc $\lambda = 0$. Donc $f : x \mapsto 0$. Donc $F \cap G \subset \{0\}$.

Or $F \cap G$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc $0 \in F \cap G$. Donc $F \cap G = \{0\}$.

Donc F et G sont en somme directe.

Remarque : en revanche, F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Remarquons d'abord que si $f \in F$, alors $f(0) = 0$. En effet, on a $f(0) = f(0) + f(0)$. Donc $f(0) = 0$. Supposons F et G supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Alors $\exists (f, g) \in F \times G$ tel que $f + g = \exp$. Alors $g(0) = \exp(0) = 1$. Donc $\exists f \in F$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = f(x) + 1$. Et donc $f : x \mapsto e^x - 1$. Mais dans ce cas

$$f(1) + f(-1) = e + \frac{1}{e} - 2 \neq 0 = f(0) = f(1 - 1).$$

Donc $f \notin F$. ☹. Donc F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ces deux sev sont seulement en somme directe.