DS 4
Suites - Groupes

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 03 Décembre 2025

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Autour d'un type de suite récurrente d'ordre 1) :
Le problème est composée de deux parties. Les deux parties sont largement indépendantes.

Le but du problème est d'étudier les suites définies par

$$u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$$

en fonction de la suite (a_n).

Partie 1 : Étude préliminaire

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

1. Préliminaire : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

   On suppose de plus que (B_n) est une suite divergente.

   (a) Justifier que (B_n) diverge vers $+\infty$.

   On suppose $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0,\ |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} b_n$.

   (c) Montrer alors que

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\frac{A_n}{B_n}\right| \leq \frac{|A_{n_0-1}|}{B_n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

(d) En déduire que

$$A_n \underset{n\to+\infty}{=} o(B_n).$$

(e) En déduire que si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$.

2. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x + x^2$.
   (b) Montrer que si $x_0 \in]-1, 0[$ alors (x_n) converge vers 0.
   (c) Montrer que si $x_0 > 0$, alors (x_n) diverge vers $+\infty$.
   (d) Étudier le cas $x_0 \in]-\infty, -1] \cup \{0\}$.
3. On suppose $x_0 \in]-1, 0[$.
   (a) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_{n+1}$.
   (b) Déterminer un équivalent simple de $a_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$.
   (c) Déduire de ce qui précède un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On suppose $x_0 > 0$.
   (a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = 2^{-n}\ln(x_n)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < y_{n+1} - y_n \leq \frac{1}{x_n 2^{n+1}}.$$

   (b) En déduire

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ 0 < y_{n+m+1} - y_n \leq \frac{1}{x_n 2^n}$$

   (c) En déduire que (y_n) converge vers un réel $\alpha > 0$.
   (d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha - \frac{\ln(x_n)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n x_n}.$$

   (e) Montrer que $\exists \lambda > 0$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda^{2^n}$.

Partie 2 : Étude de la suite (u_n)

Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}}$$

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a_n^{2^{-n-1}}$.
7. On considère la suite v définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est convergente vers une limite que l'on déterminera.
   (b) Montrer que si $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda^{2^{n+1}}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \sqrt{a_k + \sqrt{a_{k+1} + \cdots + \sqrt{a_n}}} = \lambda^{2^k} v_{n-k}.$$

8. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \lambda^{2^{n+1}}$.
9. Donner un exemple d'une suite $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que la suite u associée diverge.

Problème 2 (Groupes des périodes) :

Partie 1 : Cas particuliers

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $G(a,b) = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

1. Justifier que $G(a,b)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Cas particulier : $a = 1/3$ et $b = 1/5$.
   (a) Déterminer deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $5u + 3v = 1$.
   (b) En déduire que $G(1/3, 1/5) = \frac{1}{15}\mathbb{Z}$.
3. Autre cas particulier : $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$.
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 1-périodique et $\sqrt{3}$-périodique. On note $H = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)\}$.
   (a) Justifier que $G(1, \sqrt{3})$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $G(1, \sqrt{3}) \subset H$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
   (d) En déduire que f est constante.
4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $G(a,b)$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Partie 2 : Groupes des périodes d'une application

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons f périodique non constante. On pose

$$G = \{T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}.$$

5. Montrer que G est un groupe. C'est le groupe des périodes de f.
   On dit que f admet une période fondamentale si G est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. Et la constante $\alpha \geq 0$ s'appelle la période fondamentale de f.
6. On suppose f continue. Montrer que f est constante sur G. En déduire que f possède une période fondamentale.
7. Donner un exemple de fonction périodique non constante qui ne possède pas de période fondamentale.