



DS 4

Suites - Groupes

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 03 Décembre 2025

Problème 1 (Autour d'un type de suite récurrente d'ordre 1) :

Partie 1 : Étude préliminaire

On définit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

1. Préliminaire : Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. On suppose (B_n) divergente.

(a) On a $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = B_n + b_{n+1} > B_n$. Donc (B_n) est croissante. Par théorème de la limite monotone, $B_n \rightarrow +\infty$ car (B_n) est croissante et divergente.

(b) On suppose $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a $a_n/b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. Donc, par définition de la limite, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n/b_n| \leq \varepsilon/2$. Et donc $\forall n \geq n_0, |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} b_n$, car $b_n > 0$.

Par ailleurs, quitte à remplacer n_0 par $n_0 + 1$, on peut supposer $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

(c) On a $B_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \geq n_0$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{A_n}{B_n} \right| &= \left| \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^n a_k}{B_n} \right| \\ &\leq \frac{|A_{n_0-1}|}{B_n} + \frac{|\sum_{k=n_0}^n a_k|}{B_n} && \text{inégalité tri} \\ &\leq \frac{|A_{n_0-1}|}{B_n} + \frac{\sum_{k=n_0}^n |a_k|}{B_n} && \text{inégalité tri} \\ &\leq \frac{|A_{n_0-1}|}{B_n} + \frac{\varepsilon \sum_{k=n_0}^n b_k}{2 B_n} && \text{cf question précédente} \\ &= \frac{|A_{n_0-1}|}{B_n} + \frac{\varepsilon (B_n - B_{n_0-1})}{2 B_n} \\ &\leq \frac{|A_{n_0-1}|}{B_n} + \frac{\varepsilon}{2} && \text{car } B_{n_0-1} \geq 0 \end{aligned}$$

(d) Comme A_{n_0-1} est une constante (indépendante de n) et (B_n) diverge vers $+\infty$. Donc $\frac{|A_{n_0-1}|}{B_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. Et donc, par définition, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, \frac{|A_{n_0-1}|}{B_n} \leq \varepsilon/2$.

Alors, en reprenant la question précédente,

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1), \frac{|A_n|}{B_n} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Donc, par définition, $\frac{A_n}{B_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. Et donc, par définition, $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(B_n)$.

(e) Supposons $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$. Par caractérisation des $\sim$ par o , $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} b_n + o(b_n)$. Et donc $a_n - b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$. Donc, en appliquant les trois questions précédentes et par sommation, $A_n - B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(B_n)$. De nouveau, par caractérisation des $\sim$ par o , $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n$.

2. Étude de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(a) Soit $f : x \mapsto x + x^2$. Alors f est une fonction polynomiale de degré 2. Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(x + 1)$. On a donc directement le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f	$+\infty$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

(b) On suppose $x_0 \in]-1, 0[$.

D'après le tableau de variation de f , on a $f(]-1, 0[) =]-1/4, 0[\subset]-1, 0[$. Donc (x_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]-1, 0[$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geq 0$, donc (x_n) est croissante. Or (x_n) est bornée. Donc en particulier, (x_n) est majorée. Donc, par théorème de la limite monotone, (x_n) converge.

Or (x_n) est une suite récurrente d'ordre 1, et f est continue sur $]-1, 0[$. Donc (x_n) converge vers un point fixe de $f : x \mapsto x + x^2$.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. $f(\ell) = \ell \iff \ell + \ell^2 = \ell \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$. Donc 0 est le seul point fixe de f . Et donc (x_n) converge vers 0.

(c) On suppose $x_0 > 0$.

De nouveau, par le tableau de variations de f , $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$. Donc $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f . Et donc (x_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$.

De plus, on a toujours $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geq 0$. Donc (x_n) est croissante.

Supposons que (x_n) soit majorée. Alors elle converge par théorème de la limite monotone. Or f est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc (x_n) converge vers 0 (cf raisonnement précédente). Toujours par théorème de la limite monotone, on a alors

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \geq x_0 > 0 \quad \text{!}$$

Donc (x_n) n'est pas majorée. Et donc, par théorème de la limite monotone, (x_n) diverge vers $+\infty$.

(d) Si $x_0 = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0$, car 0 est un point fixe de f . Donc (x_n) est constante nulle. Et donc (x_n) converge.

Si $x_0 = -1$. Alors $x_1 = f(-1) = 0$. Et donc $\forall n \geq 1$, $x_n = 0$. Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire en 0. Et donc (x_n) est convergente.

Si $x_0 < -1$, alors $x_1 = f(x_0) > 0$ d'après le tableau de variation de f ($f(]-\infty, -1[) = \mathbb{R}_+^*$). Et donc, en se ramenant au cas $x_0 > 0$, $(x_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$. Donc (x_n) est divergente vers $+\infty$.

3. On suppose $x_0 \in]-1, 0[$.

(a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n(1+x_n)$, avec $1+x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$ d'après l'étude de la suite (x_n) . Donc $1+x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ ("Théorème de l'âne"). Et donc, par produit $x_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n$.

(b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

(c) On pose (b_n) la suite constante égale à 1. Donc $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. D'après la question 1e, on a donc par télescopage,

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_{n+1}} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n 1 = n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

Et donc aussi, par caractérisation des $\sim$ par o ,

$$\frac{1}{x_{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x_0} - n + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -n + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n.$$

Et donc,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

par transitivité de la relation d'équivalence.

4. On suppose $x_0 > 0$.

(a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = \frac{\ln(x_n)}{2^n}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} - y_n &= \frac{\ln(x_{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(x_n)}{2^n} \\ &= \frac{\ln(x_n) + \ln(1 + x_n)}{2^{n+1}} - \frac{\ln(x_n)}{2^n} && \text{def } (x_n) \\ &= \frac{\ln(1 + x_n) - \ln(x_n)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\ln(1 + 1/x_n)}{2^{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}x_n} && \text{car } \forall t > -1, \ln(1 + t) \leq t \end{aligned}$$

Et de plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} - y_n = \frac{\ln(1 + 1/x_n)}{2^{n+1}} > 0$$

car $1/x_n > 0$.

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < y_{n+1} - y_n \leq \frac{1}{2^{n+1}x_n}.$$

(b) Soit $m, n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a

$$\forall k \in \{n, \dots, m+n\}, 0 < y_{k+1} - y_k \leq \frac{1}{2^{k+1}x_k}.$$

D'où par sommation

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{k=n}^{n+m} (y_{k+1} - y_k) &= y_{n+m+1} - y_n \leq \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{2^{k+1}x_k} \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{2^{k+1}x_n} && (x_n) \text{ croissante} \\ &= \frac{1}{x_n} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{x_n} \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+m+1}}}{1 - 1/2} && \text{somme géo de raison } 1/2 \neq 1 \\ &\leq \frac{1}{x_n} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1/2} \\ &= \frac{1}{2^n x_n} \end{aligned}$$

D'où

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, 0 < y_{n+m+1} - y_n \leq \frac{1}{2^n x_n}.$$

(c) D'après la question 4a, (y_n) est (strictement) croissante. De plus, d'après la question précédente, avec $n = 0$, on a

$$\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq y_{m+1} - y_0 \leq \frac{1}{x_0}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n \leq y_0 + \frac{1}{x_0}$$

Donc la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Et donc elle est convergente par théorème de la limite monotone, vers $\alpha \in \mathbb{R}$.

De plus, (x_n) diverge vers $+\infty$. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} > 1$. Et donc, par croissance stricte de $\ln$, $y_{n_0} > 0$. Et par théorème de la limite monotone,

$$\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} y_n \geq y_{n_0} > 0.$$

(d) On reprend la question 4b :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, 0 < y_{n+m+1} - y_n \leq \frac{1}{x_n 2^n}$$

On vient de montrer que (y_n) converge vers $\alpha > 0$. Donc, par opération sur les suites convergentes et par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit, en faisant tendre m vers $+\infty$ dans la relation précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \alpha - y_n \leq \frac{1}{x_n 2^n}.$$

D'autre part, (y_n) est strictement croissante et $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} y_n$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n < y_{n+1} \leq \alpha.$$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < y_{n+1} - y_n \leq \alpha - y_n$. On peut donc améliorer la relation en :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \alpha - y_n = \alpha - \frac{\ln(x_n)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n x_n}.$$

(e) En reprenant la relation précédente, on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \alpha - \frac{\ln(x_n)}{2^n} &\leq \frac{1}{2^n x_n} \\ \iff \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \alpha 2^n - \ln(x_n) &\leq \frac{1}{x_n} \\ \iff \forall n \in \mathbb{N}, 1 < e^{\alpha 2^n - \ln(x_n)} = \frac{e^{\alpha 2^n}}{x_n} &\leq e^{1/x_n} \quad \text{car expo strictement croissante} \end{aligned}$$

Or $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, donc par composition de limites, $e^{1/x_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et donc, par théorème des gendarmes, $\frac{e^{\alpha 2^n}}{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Donc, par définition de suites équivalentes,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\alpha 2^n} = (e^\alpha)^{2^n}$$

Si on pose $\lambda = e^\alpha > 0$, alors $\exists \lambda > 0$ tel que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda^{2^n}$.

Partie 2 : Étude de la suite (u_n)

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}$$

5. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}}}} \geq \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}} = u_n$$

et donc la suite (u_n) est croissante (et même strictement car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante et $\sqrt{a_{n+1}} > 0$).

Cette rédaction n'est pas complètement satisfaisante. Elle cache des petites récurrences. Soyons plus précis : on a $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{a_{n+1}} > 0$ par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$. Et donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}} > \sqrt{a_n}$, toujours par croissance stricte. Puis, par une récurrence descendante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, n\}, \sqrt{a_k + \sqrt{a_{k+1} + \cdots + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}}}} > \sqrt{a_k + \sqrt{a_{k+1} + \cdots + \sqrt{a_n}}}$$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.

6. Toujours par stricte croissance de la fonction racine, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}} \geq \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{a_n}}}}_{n+1 \text{ racines}} = \underbrace{(\dots ((a_n^{1/2})^{1/2}) \dots)^{1/2}}_{n+1 \text{ puissances}} = a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}} = a_n^{2^{-n-1}}$$

7. Soit $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$.

(a) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, continue, croissante. Il est clair que $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable. Donc v est bien définie, positive et monotone. De plus, $\forall x \geq 0, f(x) - x = \sqrt{1+x} - x = \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x}+x}$. D'où l'on déduit que f a un seul point fixe sur $\mathbb{R}_+$ qui est $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$. Donc $v_0 \leq \ell$. Par croissance de f , on en déduit, par une récurrence facile, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = f(v_{n-1}) \leq f(\ell) = \ell$. Donc (v_n) est majorée. De plus, $\forall x \in [0, \ell], f(x) - x \geq 0$, donc (v_n) est croissante. Et donc (v_n) est convergente par théorème de la limite monotone, vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Soit $\lambda \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda^{2^{n+1}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\sqrt{a_n} = \lambda^{2^n} = \lambda^{2^n} v_{n-n}$. Supposons $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sqrt{a_k + \cdots + \sqrt{a_n}} = \lambda^{2^k} v_{n-k}$. Alors

$$\sqrt{a_{k-1} + \sqrt{a_k + \cdots + \sqrt{a_n}}} = \sqrt{\lambda^{2^k} + \lambda^{2^k} v_{n-k}} = \lambda^{2^{k-1}} \sqrt{1 + v_{n-k}} = \lambda^{2^{k-1}} v_{n-k+1}$$

D'où, par une récurrence descendante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, n\}, \sqrt{a_k + \cdots + \sqrt{a_n}} = \lambda^{2^k} v_{n-k}.$$

8. D'après le théorème de la limite monotone, comme (u_n) est croissante d'après la question 5, (u_n) est convergente si, et seulement si, (u_n) est majorée.

Supposons (u_n) convergente. Alors $\exists M \in \mathbb{R}_+$ (car $u_n \geq 0$) tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$. Donc, par transitivité de la relation d'ordre, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}} \leq M$. Et donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}})^{2^{n+1}} \leq M^{2^{n+1}}$.

Réciproquement, supposons $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \lambda^{2^{n+1}}$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \sqrt{\lambda^2 + \cdots + \sqrt{\lambda^{2^{n+1}}}} = \lambda v_n \leq \lambda \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

en utilisant la question 7b pour l'expression en fonction de v et la 7a pour la majoration de la suite v . Donc u est majorée et donc convergente par théorème de la limite monotone.

Donc u est bien convergente si et seulement si $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \lambda^{2^{n+1}}$.

9. On peut donner beaucoup d'exemples. Prenons, pour ne pas faire trop gros ou compliqué, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = e^{n!}$. D'après la question précédente, u est convergente si, et seulement si, $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, e^{n!} \leq \lambda^{2^{n+1}}$.

Supposons que ce soit le cas. Supposons donc $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, e^{n!} \leq \lambda^{2^{n+1}}$. On a donc, par croissance de la fonction $\ln$, $\forall n \in \mathbb{N}, n! \leq \ln(\lambda) 2^{n+1}$. En particulier, on aurait $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(2^n)$. Donc 🐼 avec une croissance comparée.

Et donc on en déduit, d'après le critère précédente, que la suite u associée à la suite $(e^{n!})$ est divergente.

Problème 2 (Groupes de périodes) :

Partie 1 : Cas particuliers

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $G(a, b) = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

1. $G(a, b)$ est la somme de deux sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$, alors $G(a, b)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

2. Supposons $a = 1/3$ et $b = 1/5$.

(a) Il est facile (en sachant un minimum calculer) que $5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1$.

Nous reverrons ces notions en arithmétique avec le théorème de Bézout.

(b) On a donc $\frac{-1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$. On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{15}n = \frac{1}{3}(-n) + \frac{1}{5}(2n) \in G(1/3, 1/5)$.

Inversement, si $a, b \in \mathbb{Z}$, alors $\frac{1}{3}a + \frac{1}{5}b = \frac{1}{15}5a + \frac{1}{15}3b = \frac{1}{15}(5a + 3b) \in \frac{1}{15}\mathbb{Z}$.

Donc, par double inclusion est définition de l'égalité entre ensemble, $G(1/3, 1/5) = \frac{1}{15}\mathbb{Z}$.

3. On suppose $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique et $\sqrt{3}$ -périodique. On pose $H = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)\}$.

(a) On sait déjà que $G(1, \sqrt{3})$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Donc supposons que $G(1, \sqrt{3})$ est monogène. Supposons donc $\exists \alpha \geq 0$ tel que $G(1, \sqrt{3}) = \alpha\mathbb{Z}$. Or $1 \in G(1, \sqrt{3})$, donc $1 \in \alpha\mathbb{Z}$. Donc $\exists p \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = p\alpha$. Comme $1 > 0$ et $\alpha \geq 0$, on en déduit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$ et donc $\alpha = \frac{1}{p}$.

De plus, $\sqrt{3} \in G(1, \sqrt{3})$, donc $\exists q \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{3} = \alpha q = \frac{q}{p}$. Et donc $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. 🐼

Donc $G(1, \sqrt{3})$ n'est pas monogène et donc $G(1, \sqrt{3})$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Soit $x, y \in \mathbb{Z}$. Alors $f(x + y\sqrt{3}) = f(y\sqrt{3}) = f(0)$ par 1-périodicité et $\sqrt{3}$ -périodicité. Donc $x + y\sqrt{3} \in H$. D'où $G(1, \sqrt{3}) \subset H$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $G(1, \sqrt{3})$ est dense dans $\mathbb{R}$, par caractérisation séquentielle de la densité, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G(1, \sqrt{3})^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Mais comme $G(1, \sqrt{3}) \subset H$, on a donc en particulier $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$.

(d) Par définition de H , $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = f(0)$. Donc, par suite constante, $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$.

Mais (x_n) converge et f est continue, donc $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$. Et par unicité de la limite, $f(0) = f(x)$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

4. Commençons par une preuve arithmétique. Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$. Supposons $a/b \in \mathbb{Q}$. Alors $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha \wedge \beta = 1$ tels que $a/b = \alpha/\beta$. Donc $a\beta = b\alpha$. Et par Bézout, $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $u\alpha + v\beta = 1$. D'où

$$\begin{aligned}\forall p, q \in \mathbb{Z}, \quad ap + bq &= (au\alpha + av\beta)p + (bu\alpha + bv\beta)q \\ &= (au\alpha + bv\alpha)p + (ua\beta + bv\beta)q \\ &= (\alpha p + \beta q)(au + bv)\end{aligned}$$

Donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset (au + bv)\mathbb{Z}$. Et donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ ne peut pas être dense dans $\mathbb{R}$.

Refaisons la preuve, mais sans argument arithmétique. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et supposons $a/b \in \mathbb{Q}$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a/b = p/q$. Alors

$$G(a, b) = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{pb}{q}\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{b}{q}(p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}) \subset \frac{b}{q}(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) = \frac{b}{q}\mathbb{Z}$$

et donc $G(a, b)$ n'est pas dense (par exemple, $]0, b/q[\cap G(a, b) = \emptyset$).

Réciproquement, si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. Comme c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$. En particulier, $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $a = \alpha u$ et $b = \alpha v$. Et donc $a/b = u/v \in \mathbb{Q}$.

Partie 2 : Groupes des périodes

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons f périodique non constante. On pose

$$G = \{T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}.$$

5. On a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+0) = f(x)$. Donc $0 \in G$.

Soit $T, T' \in G$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x + (T - T')) &= f((x - T') + T) && \text{comm+asso} \\ &= f(x - T') && \text{car } T \in G \\ &= f((x - T') + T') && \text{car } T' \in G \\ &= f(x) && \text{comm+asso} \end{aligned}$$

Alors G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

6. On suppose f est continue. Soit $T \in G$. Alors $f(T) = f(0 + T) = f(0)$ d'après la définition de G . Et donc f est constante égale à $f(0)$ sur G .

G étant un sous-groupe de $\mathbb{R}$, G est soit dense soit monogène. Supposons G dense. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors par caractérisation séquentielle de la densité, $\exists (T_n) \in G^{\mathbb{N}}$ tel que $T_n \rightarrow x$. Or f est constante égale à $f(0)$ sur G , donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(T_n) = f(0)$. Et donc $f(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$.

Mais $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$, donc $f(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ par continuité. Et donc, par unicité de la limite, $f(x) = f(0)$. Et donc f est constante. Donc ❌ par hypothèse.

Donc G n'est pas dense. Et donc $\exists \alpha \geq 0$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$. Donc f a une période fondamentale.

7. On pose $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$. Alors f est non constante car $f(0) = 1$ et $f(\sqrt{2}) = 0$. Or $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$ car $x+1 \in \mathbb{Q} \iff x \in \mathbb{Q}$. Donc f est périodique.

Mais de plus, si $r \in \mathbb{Q}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+r) = f(x)$ car $x+r \in \mathbb{Q} \iff x \in \mathbb{Q}$. Et donc le groupe des période de f contient $\mathbb{Q}$. Et $\mathbb{Q}$ n'est pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \geq 0$ puisqu'il est dense dans $\mathbb{R}$. Donc, a fortiori, le groupe des périodes de f est aussi dense dans $\mathbb{R}$ et n'est donc pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$.

Donc f est périodique, non constante et n'a pas de période fondamentale.