



# Chapitre 11 - TD : Applications Linéaires

Simon Dauguet  
*simon.dauguet@gmail.com*

2 décembre 2025

## 1 Applications linéaires

### Exercice 1 :

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x + y + 2z \end{matrix} \qquad f_2 : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y + 1 \end{matrix}$$

$$f_3 : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{matrix} \qquad f_4 : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x - z \end{matrix}$$

### Exercice 2 :

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) := (x + y, x - y)$ . Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$  et donner sa réciproque.

### Exercice 3 :

On note  $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ dérivable}\}$ . Soit  $\varphi : \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\psi : \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u \text{ convergente}\} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par  $\varphi(f) := f'(0)$  et  $\psi(u) := \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Montrer que ces applications sont des formes linéaires.

### Exercice 4 :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $f : E \rightarrow E$ . Montrer que

$$f \text{ linéaire} \iff \forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x + y) + f(\lambda z) = f(x) + f(y) + \lambda f(z).$$

## 2 Noyau, Image

### Exercice 5 :

On pose  $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On considère  $\varphi, \psi : E \rightarrow E$  définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\varphi(u))_n := u_{n+1} - u_n \qquad \text{et} \qquad (\psi(u))_n := \sum_{k=0}^n u_k$$

1. Montrer que  $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$ .

2. Calculer  $\varphi \circ \psi$  et  $\psi \circ \varphi$ .
3. Déterminer les images et noyaux de  $\varphi$  et  $\psi$ .

**Exercice 6 ([✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

1.  $g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \ker g$
2.  $\ker(f) \subset \ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$  et  $g(\text{Im}(f)) = \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$
3. Comparer  $\ker f \cap \ker g$  et  $\ker(f + g)$
4. Comparer  $\text{Im}(f + g)$  et  $\text{Im } f + \text{Im } g$
5. Comparer  $\ker f$  et  $\ker f^2$
6. Comparer  $\text{Im } f$  et  $\text{Im } f^2$

**Exercice 7 ([✓]) :**

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $A, B$  deux sev de  $E$ . Montrer que

$$f(A) \subset f(B) \implies A + \ker f \subset B + \ker f$$

**Exercice 8 ([✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $F$  un sev de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Exprimer  $u^{-1}(u(F))$  en fonction de  $F$  et  $\ker u$
2. Exprimer  $u(u^{-1}(F))$  en fonction de  $F$  et  $\text{Im } u$ .
3. À quelle condition a-t-on  $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$ .

**Exercice 9 ([✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que

$$f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$$

1. Montrer que  $f$  est inversible et exprimer  $f^{-1}$ .
2. Montrer que  $\ker(f - \text{Id}_E)$  et  $\ker(f - 2\text{Id}_E)$  sont des sev supplémentaires de  $E$ .

**Exercice 10 ([✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $f \in \mathcal{L}(E)$  nilpotente, i.e. telle que  $\exists n \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $f^n = 0$ .

Montrer alors que  $\text{Id}_E - f \in \text{GL}(E)$  et exprimer son inverse en fonction de  $f$ .

**Exercice 11 ([✓]) :**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  vérifiant  $f^3 = \text{Id}_E$ . Montrer que

$$\ker(f - \text{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \text{Id}_E) = E$$

### 3 Dimension finie

**Exercice 12 :**

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes

1.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) := (y - z, z - x, x - y)$

2.  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z, t) := (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$
3.  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) := z + i\bar{z}$  où  $\mathbb{C}$  est vu comme un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2.

**Exercice 13 ([✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n \geq 1$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$\exists a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}, (a_0, \dots, a_{n^2}) \neq (0, \dots, 0), \sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0.$$

**Exercice 14 ([✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\text{Im } f$  et  $\ker f$  sont supplémentaires dans  $E$
2.  $E = \text{Im } f + \ker f$
3.  $\text{Im}(f^2) = \text{Im } f$
4.  $\ker(f^2) = \ker f$ .

**Exercice 15 ([✓]) :**

Justifier qu'il existe une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), \quad f(1, 1, 0) = (1, 0), \quad f(1, 1, 1) = (1, 1)$$

Exprimer alors  $f(x, y, z)$  et déterminer son image et son noyau.

**Exercice 16 ([✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \geq 1$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ . On note

$$\mathcal{C} := \{g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\}$$

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  est une sev de  $\mathcal{L}(E)$
2. Montrer que

$$\mathcal{C} = \{a_0 \text{Id}_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}, a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\}$$

3. Déterminer la dimension de  $\mathcal{C}$

**Exercice 17 ([✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer

$$\ker f = \text{Im } f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2 \text{ rg } f$$

**Exercice 18 ([✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  telles que  $f + g \in \text{GL}(E)$  et  $g \circ f = 0$ . Montrer que

$$\text{rg } f + \text{rg } g = \dim E$$

**Exercice 19 ([✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose

$$\text{Im } f + \text{Im } g = \ker f + \ker g = E$$

Montrer que ces sommes sont directes.

**Exercice 20 (Pseudo-inverses [✓]) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Soit  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  telles que

$$g \circ f \circ g = g \quad \text{et} \quad f \circ g \circ f = f$$

1. Montrer que  $\text{Im } f \oplus \ker g = E$
2. Établir que  $f(\text{Im } g) = \text{Im } f$ .

**Exercice 21 :**

Soit  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que

$$\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(F).$$

**Exercice 22 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  de rang 1.

Montrer que  $\exists \lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u^2 = \lambda u$ .

**Exercice 23 (Base antéduale (\*)) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ . Le but de cet exercice est de montrer qu'à toute base de  $E^*$  est associée une base de  $E$  qui s'appelle la base antéduale. Autrement dit, le but est de montrer qu'à toute base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E^*$ , il existe une unique base  $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $(f_1, \dots, f_n)$  est la base duale associée à la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . La base  $\mathcal{B}$  s'appelle la base antéduale de  $(f_1, \dots, f_n)$ .

Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $E^*$ .

1. Montrer que les noyaux des formes linéaires  $f_1, \dots, f_n$  sont deux à deux distincts.
2. Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $H_1, \dots, H_k$  des hyperplans de  $E$ , deux à deux distincts. Montrer que

$$\dim \left( \bigcap_{i=1}^k H_i \right) = n - k.$$

3. Montrer que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $D_i := \bigcap_{j \neq i} \ker(f_j)$  est une droite vectorielle.
4. Construire la base antéduale de  $(f_1, \dots, f_n)$ .

## 4 Projecteurs, Symétries

**Exercice 24 :**

Soit  $p$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même définie par

$$p(x, y, z) := (-2x - 6z, x + y + 2z, x + 3z)$$

Montrer que  $p$  est un projecteur. Déterminer  $\ker p$  et  $\text{Im } p$ .

**Exercice 25 :**

Dans chacun des cas suivants, montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  puis calculer la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$

1.  $E := \mathbb{R}^2$ ,  $F := \text{Vect}(0, 1)$ ,  $G := \text{Vect}(1, 0)$
2.  $E := \mathbb{R}^2$ ,  $F := \text{Vect}(1, 0)$ ,  $G := \text{Vect}(1, 1)$
3.  $E := \mathbb{R}^3$ ,  $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = z\}$ ,  $G := \text{Vect}(1, 1, 1)$

4.  $E := \mathbb{R}^3$ ,  $F := \text{Vect}(1, 1, 0)$ ,  $G := \text{Vect}((0, 1, 1), (-1, 0, 3))$

**Exercice 26 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$ .

1. Montrer que  $p + q$  est un projecteur si, et seulement si,  $p \circ q + q \circ p = 0$ .
2. On suppose  $p \circ q = 0$ . Montrer que  $r = p + q - q \circ p$  est un projecteur sur  $\text{Im}(p) + \text{Im}(q)$  parallèlement à  $\ker(p) \cap \ker(q)$ .