



Chapitre 12 - TD : Limites, Continuité

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

9 décembre 2025

1 Limites et Continuité

Exercice 1 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 4}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\arccos x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x))$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan(x) \tan(2x)$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lfloor x \rfloor} - 1}{x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice 2 :

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique convergente en $+\infty$. Montrer que g est constante.

Exercice 3 :

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y > 0, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{x + y}.$$

Exercice 4 (***) :

Soit la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Soit $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Montrer que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour $n \leq \lfloor x \rfloor$ et décroissante pour $n > \lfloor x \rfloor$.
3. En déduire que $\forall x \geq 0, f(x) = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor!}$.
4. Montrer que f est continue.

Exercice 5 :

Étudier la continuité de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 \end{array}$$

Exercice 6 ([✓]) :

Montrer que la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est totalement discontinue sur $\mathbb{R}$, i.e. qu'elle est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 7 ([✓]) :

Montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}$$

peut être prolongée par continuité en une fonction continue sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 8 :

Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{1/x + \sin(1/x)}$$

Montrer que f est prolongeable en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 ([✓]) :

On considère l'équation différentielle

$$ty' + y = e^t$$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Déterminer les solutions qui sont continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -\infty$.

Montrer que f admet une borne supérieure et qu'elle est atteinte.

Exercice 11 :

Soit $f \in \mathcal{F}([0, 1], [0, 1])$ définie par

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $[0, 1]$
2. Montrer que f est une bijection.

Exercice 12 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue 1-périodique et $\sqrt{2}$ -périodique.

Montrer que f est constante.

2 TVI and co.

Exercice 13 ([✓]) :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue.

1. Montrer que f admet un point fixe.

Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], [0, 1])$ telle que $f \circ g = g \circ f$. Soit F l'ensemble des points fixes de f .

2. Montrer que F admet un plus grand et un plus petit élément.
3. Montrer que F est stable par g .
4. Montrer que $\exists x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 14 ([✓]) :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$.

Montrer que $\exists x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

Exercice 15 (* [✓]) :

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell < 1$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$, à l'aide d'une fonction auxiliaire judicieusement choisie.

Exercice 16 :

Montrer que toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 17 :

Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f est bornée et g continue.

Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 18 ([✓]) :

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in [a, b], f(x) < g(x)$$

Montrer $\exists \alpha > 0, \forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) - \alpha$

Exercice 19 :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0)$.

Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 20 ([✓]) :

Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.
2. Déterminer, pour $y \in] -1, 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de f .

Exercice 21 ([✓]) :

Soit $f : x \mapsto 2 \cos(x) + \cos(2x)$.

1. Montrer que f établit une bijection de $I = \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ sur un intervalle J à préciser.
2. Exprimer $\cos(f^{-1}(t))$ en fonction de t pour tout $t \in J$.

Exercice 22 ([✓]) :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que

$$f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}_+}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. En déduire qu'elle est strictement croissante.
3. Montrer par l'absurde, que $\forall x \geq 0, f(x) \geq x$.
4. De même montrer que $\forall x \geq 0, f(x) \leq x$.
5. Conclure.

Exercice 23 :

Deux étudiants révisent leur cours de SI d'électricité. Ils se souviennent $E(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$. Eugénie assure : "l'énergie E étant continue, l'intensité i doit également être continue". Mathis n'est pas convaincu. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 24 :

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$. En remarquant que

$$\forall n \geq 1, f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right),$$

montrer que $\forall n \geq 2, \exists x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = f(x_n + 1/n)$.

Exercice 25 :

Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [a, b], |f(x)| < 1$.

1. Montrer que $\exists k \in [0, 1[$ tel que $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq k$.
2. Soit $(x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)^n$.

3 Avec des équations fonctionnelles

Exercice 26 (Endomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ continus [✓]) :

Le but de cet exercice est de déterminer les endomorphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ continus.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un endomorphisme de groupe continue en 0, c'est-à-dire une application continue en 0 telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = nf(1)$.
3. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$.
4. En déduire une expression de f et conclure.

Exercice 27 ([✓]) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$, montrer que cette suite est croissante si $x \leq 1$ et décroissante si $x \geq 1$.
2. Dans les deux cas en déduire que la suite est convergente et donner sa limite.
3. Montrer que f est constante.

Exercice 28 ([✓]) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et 1 et telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x^2)$.

1. Montrer que $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x^{2^n}) = f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)$.
2. Montrer que f est constante sur $[0, 1[$ et sur $[1, +\infty[$. En déduire que $f|_{\mathbb{R}_+}$ est constante.
3. Montrer finalement que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29 ([✓]) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = 1$. On suppose de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos(x)$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \sin(x) f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

2. Montrer que l'on peut étendre la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ par continuité en une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que $f = \varphi$.

Exercice 30 :

Quelles sont les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$