



Interrogation 11

Dimensions Finies

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Théorème de la base incomplète.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Toute famille libre de E peut-être complétée en une base de E . i.e. si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E , alors il existe des vecteurs $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de E tels que $(e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une base de E .

2. Caractérisation des bases en dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . Alors $\mathcal{B}$ est une base de E , ssi $\mathcal{B}$ est une famille libre, ssi $\mathcal{B}$ engendre E .

3. Définition du rang d'une famille de vecteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, soit $e_1, \dots, e_n \in E$. On définit le rang de $(e_1, \dots, e_n)$, noté $\text{rg}(e_1, \dots, e_n)$, par : $\text{rg}(e_1, \dots, e_n) = \dim(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n))$.

4. Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, soit F, G des sev de E tels que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Alors $E = F \oplus G$ (i.e. F et G sont supplémentaires dans E) ssi $F \cap G = \{0\}$, ssi $E = F + G$.

5. Formule de Grassmann.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F, G des sev de E de dimensions finies. Alors $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$.

6. Caractérisation de la liberté par le rang.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $e_1, \dots, e_n \in E$. Alors $\text{rg}(e_1, \dots, e_n) \leq n$. De plus, $(e_1, \dots, e_n)$ libre ssi $\text{rg}(e_1, \dots, e_n) = n$.

7. Principe d'extension d'une famille libre.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $e_1, \dots, e_{n+1} \in E$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Alors $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est libre, si et seulement si, $e_{n+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

8. Définition de la dimension d'un espace vectoriel.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie (donc engendré par une famille finie de vecteurs). La dimension de E , noté $\dim(E)$, est le nombre de vecteur de n'importe quelle base de E (toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs).

Exercice 2 :

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + t = y - t = 0\}$. Montrer que E est sev de $\mathbb{R}^4$ et donner la dimension de E .

Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + t = y - t = 0\} && \text{def } E \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = -2y, t = y\} \\ &= \{(-2y, y, z, y), y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{-y(2, -1, 0, -1) + z(0, 0, 1, 0), y, z \in \mathbb{R}\} && \text{def opé de } \mathbb{R}^4 \\ &= \text{Vect}((2, -1, 0, -1), (0, 0, 1, 0)) && \text{def Vect} \end{aligned}$$

Donc E est un sev de $\mathbb{R}^4$ et $\dim(E) \leq 2$ (car E est engendré par une famille de deux vecteurs).

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda(2, -1, 0, -1) + \mu(0, 0, 1, 0) = 0 &\iff (2\lambda, -\lambda, \mu, -\lambda) = 0 && \text{def opé } \mathbb{R}^4 \\ &\iff \begin{cases} 2\lambda = 0 \\ -\lambda = 0 \\ \mu = 0 & -\lambda = 0 \end{cases} && \text{liberté base cano de } \mathbb{R}^4 \\ &\iff \lambda = \mu = 0 \end{aligned}$$

Donc $((2, -1, 0, -1), (0, 0, 1, 0))$ est libre. Donc $((2, -1, 0, -1), (0, 0, 1, 0))$ est une base de E , par définition d'une base.
Et donc $\dim(E) = 2$ par définition de la dimension.