DM 5
Applications Linéaires

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 16 Décembre 2025

Problème 1 (Applications Linéaires) :
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Dans tous le problème, on considère un endomorphisme f de E vérifiant

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$$

1. On suppose ici que $f = \alpha \,\mathrm{Id}_E$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de α possible.
2. On revient au cas général.
   (a) Montrer que f est bijectif et exprimer simplement f^{-1}.
   (b) Justifier que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (c) Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$
   (d) Calculer $(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E)$ et en déduire que $\ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
   (e) De même, justifier que $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$.
3. On suppose désormais que les endomorphisme f et Id_E sont linéairement indépendants.
   (a) Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de f et Id_E
   (b) Établir que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists!(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f^p = a_p f + b_p \mathrm{Id}_E$.
   (c) Déterminer a_0, a_1, b_0, b_1 et exprimer a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (d) Donner une relation de récurrence entre a_{p+2}, a_{p+1} et a_p, pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire les expressions de a_p et b_p en fonction de $p \in \mathbb{N}$. Vérifier que les suites (a_p) et (b_p) sont convergentes de limite $2/3$ et $1/3$ respectivement.
   (e) On pose $q = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E$. Montrer que q est le projecteur sur $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$.
4. On pose $\mathcal{M} = \{\lambda f + \mu \,\mathrm{Id}_E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $\forall g, h \in \mathcal{M}$, $g \circ h \in \mathcal{M}$ et $g \circ h = h \circ g$ (on dit que $(\mathcal{M}, +, \cdot, \circ)$ est algèbre commutative).
   (b) Déterminer la dimension de $\mathcal{M}$ (en tant que $\mathbb{R}$-ev, bien sûr).

Problème 2 (BONUX (Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$)) :
Le but de ce problème est d'établir la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie respective n et p. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F.

1. On considère la base duale $\mathcal{B}^*$ associée à $\mathcal{B}$. Montrer que $\mathcal{B}^*$ forme une base de E^*.
2. Montre que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall j \in \{1, \ldots, p\}$, $e_i^* \varepsilon_j$ définie bien un vecteur de $\mathcal{L}(E, F)$.
3. Montrer que la famille $(e_i^* \varepsilon_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathcal{L}(E, F)$.
4. Montrer que $(e_i^* \varepsilon_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{L}(E, F)$.
5. En déduire que $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et donner sa dimension.